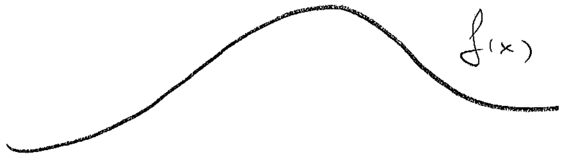
7 og 8 januar 2013

Grenser og kontinuitet.

Vi sier gjerne at en funksjon $f(x)$ er <u>kontinuerlig</u> i $x=a$ hvis $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a.

Eksempel

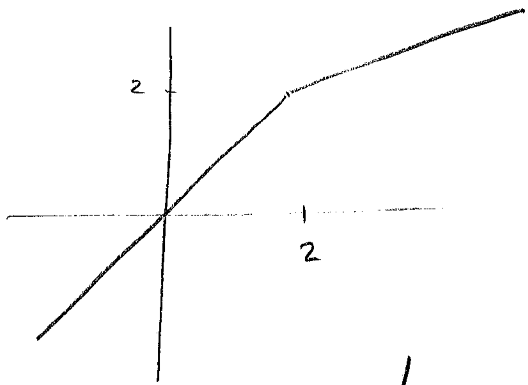


$f(x)$ er kontinuerlig i hvert punkt x.

Hvis $f(x)$ ikke er kontinuerlig i $x=a$ sier vi at $f(x)$ er <u>diskontinuerlig</u> i $x=a$

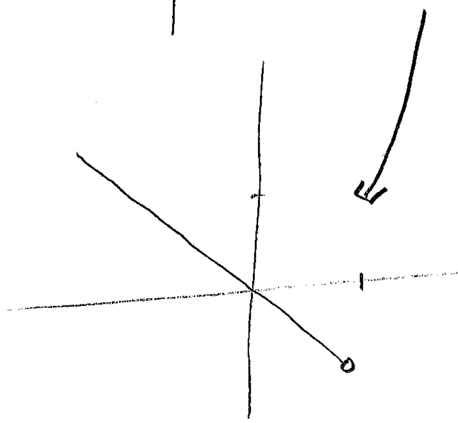
Eksempel 1) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \le 1 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

kontinuerlig (i alle punkt)

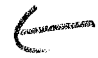


2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$

$f(x)$ er diskontinuerlig i $x=1$
(ellers er den kontinuerlig)

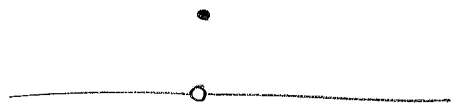


 : endepunktet er med

 ,  eller  betyr at endepunktet ikkje er med.

Diskontinuiteten i $x=1$ er eksempel på en <u>hopp-diskontinuitet</u>

3) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$



$f(x)$ er ikkje kontinuerlig i $x=0$.

Diskontiniteten er eksempel på en <u>hevbar diskontinuitet</u>.

Ved å endre funksjonsverdien i $x=0$ fra 2 til 1 så får vi en funksjon som er kontinuerlig i $x=0$.

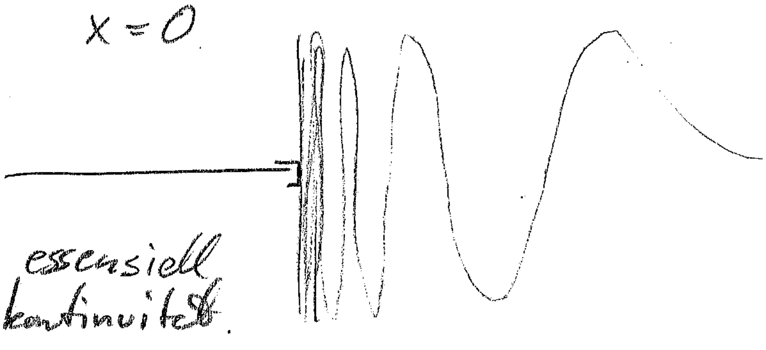
4) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases}$

$f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi \cdot n}\right) = 1$ og $f\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi \cdot n}\right) = -1$

for alle naturlige tall n.

$f(x)$ svinger derfor mellom -1 og 1 uendelig mange ganger på alle intervaller $(0, d)$ for positive reelle tall d. $f(x)$ vil derfor ikke nærme seg en verdi når x går mot null.

Den kan da ikke nærme seg $f(0)=0$ når x går mot 0, og $f(x)$ er derfor <u>ikke</u> kontinuerlig i $x=0$



Eksempel på en essensiell diskontinuitet.

Vi ønsker nå å presisere hva vi mener med "nærmer seg".

Vi sier at $f(x)$ har grense (eng. limit) L når x går mot a hvis det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - L| < \epsilon$

for alle $x \neq a$ slik at $|x-a| < \delta$.

Vi skriver gjerne

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Dette er en presis definisjon av grenser som gjerne kalles ϵ-δ - definisjonen.

ϵ epsilon (gresk e)

δ delta (gresk d, andre symbol er Δ)

Definisjonen er tungvint å bruke på spesifikke funksjoner, men den er godt egna til å bevise resultater om grenser.

Den er helt presis, her det ikkje rom for ulike tolkninger av hva det vil si å nærme seg L.

Hvis det finnes en $\delta > 0$ slik at $f(x)$ ikke er definert i $(a-\delta, a+\delta)$ sier vi at grensen er tom.

Det gir mening å skrive $\lim_{x \to a} f(x)$ selv om grensen ikke eksisterer (på samme måte som en kan skrive opp en rekke selv om den ikke har sum.)

Grensen av $f(x)$ når x går mot a fra høyre (positiv) side er L

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

hvis $f(x)$ avgrenset til $x > a$ har grense L.

Tilsvarende er $\lim_{x \to a^-} f(x)$ grensen av $f(x)$ når x går mot x fra venstre (negativ) side.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Anta a er i definisjonsmengden til $f(x)$.

$f(x)$ er kontinuerlig i a hvis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(eller grensen er tom).

Vi krever både at grensen eksisterer og at den er lik funksjonsverdien, $f(a)$, i a.

Oversatt til ϵ-δ-definisjonen er dette:

$f(x)$ er kontinuerlig i a hvis det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-a| < \delta$.

Det er vanlig å dele inn diskontinuiteter etter hvor alvorlige de er.

<u>Hevbar diskontinuitet</u> $\lim_{x \to a} f(x)$ eksisterer men er ulik $f(a)$.

Ved å redefinere f til funksjonen:

$$\begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \lim_{x \to a} f(x) & x = a \end{cases}$$

får vi en funksjon som er kontinuerlig i $x = a$.

Hopp diskontinuitet

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{og}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{eksisterer og er ulike}$$

Essensiell diskontinuitet hvis den ikke er hevbar eller hopp diskontinuitet.

En funksjon som er kontinuerlig i alle punkt i definisjonsmengden sier vi er kontinuerlig.

Vi viser nå direkte fra definisjonen at

$f(x) = 3x+1$ (generelt $ax+b$)

og $g(x) = x^2$ er kontinuerlige funksjoner.

Vi forventer at $\lim_{x \to a} 3x+1 = 3a+1 = L$

$|f(x) - L| = 3|x-a|$ dette er mindre enn

ϵ når $|x-a|$ er mindre enn $\epsilon/3$.

For $\epsilon > 0$ velg derfor $\delta = \epsilon/3$.

Vi forventer $\lim_{x \to a} x^2 = a^2 = L$

$$|f(x) - L| = |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)|$$

$$= |x-a||x+a| \leq |x-a|(2|a|+1)$$ når $|x-a| < 1$.

$|x^2 - a^2| < \epsilon$ når $|x-a| <$ minimum av $\frac{\epsilon}{2|a|+1}$ og 1.

Grensesetningene

Anta $\lim_{x \to a} f(x) = K$ og $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Da er

1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = K + L$

2) $\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot K$

   k konstant

3) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x)) = K \cdot L$

4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$ hvis $L \neq 0$

   (hvis $L = 0$ har vi ingen konklusjon)

Disse resultatene følger fra ϵ-δ-definisjonen
(ikke så vanskelig å vise)

Konsekvenser.

Alle polynomer er kontinuerlige

Alle rasjonale uttrykk er kontinuerlige
(Definisjonsmengden er alle x slik at nevner er ulik 0)

Eksempel

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = \underline{\underline{2}}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ eksisterer ikkje, men

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = \underline{\underline{1}}$$

Husk at $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-1}{x-1}$ Grensen av nevneren er $\lim\limits_{x\to 3} x-1 = 2$

grensesetningen gir:

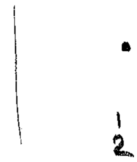
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2-1}{\lim\limits_{x\to 3} x-1} = \frac{9-1}{3-1} = \underline{\underline{4}}$$

Oppgave Finn alle diskontinuiteter til funksjonene og klassifiser dem.

1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definert for $x \neq 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2x-2} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

3) $f(2) = 1$ definisjonsmengde er bare $x = 2$



4) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ (ikke definert for $x > 1$)

5) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ -x & x > 2 \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasjonalt tall} \\ 0 & x \text{ irrasjonalt tall.} \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-4} & x \neq -2, 2 \\ 15 & x = 2 \end{cases}$

Vertikale asymptoter.

Vi sier at $f(x)$ går mot (pluss) uendelig når x går mot a hvis det for alle naturlige tall N finnes en $\delta > 0$ slik at

$f(x) > N$ for alle x slik at $|x-a| < \delta$, $x \neq a$.

Vi skriver $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Tilsvarende defineres $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

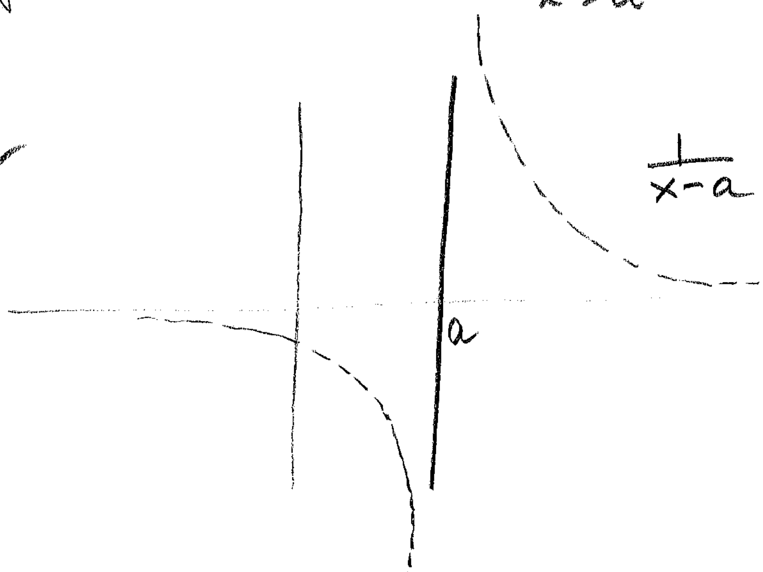
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ etc.

Vi sier at en vertikal linje gitt ved $x = a$ er en vertikal asymptote for $f(x)$ hvis minst en av følgende utsagn er sanne:

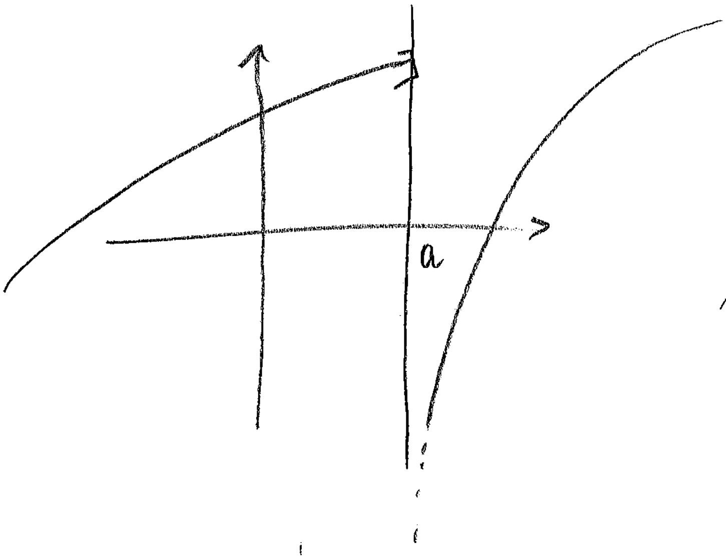
$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ eller $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ eller

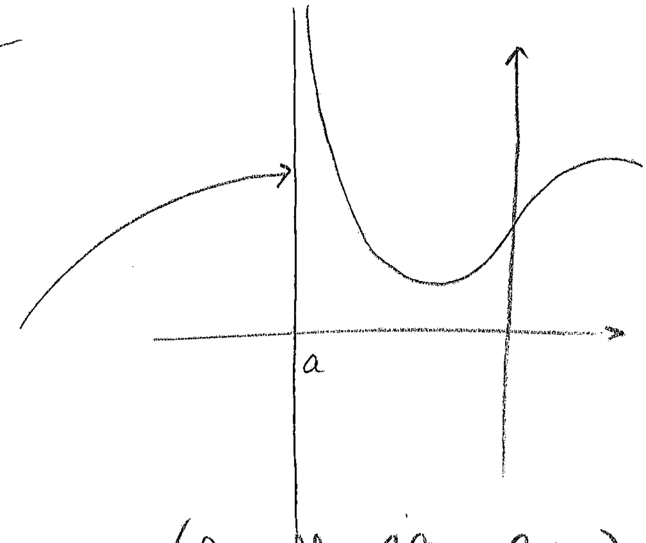
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ eller $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Eksempler

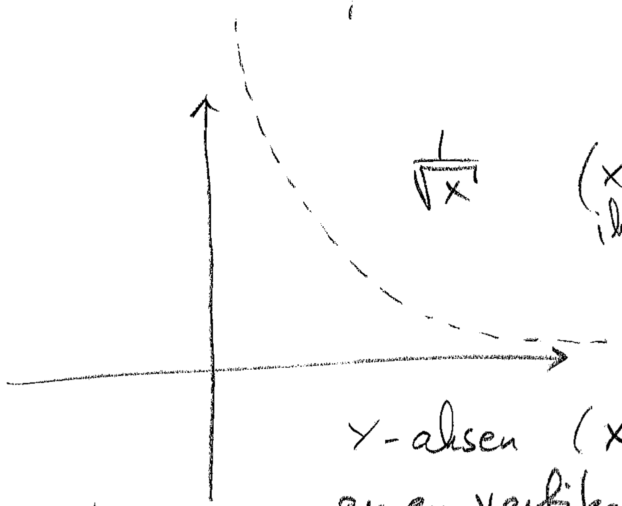


$\longrightarrow$



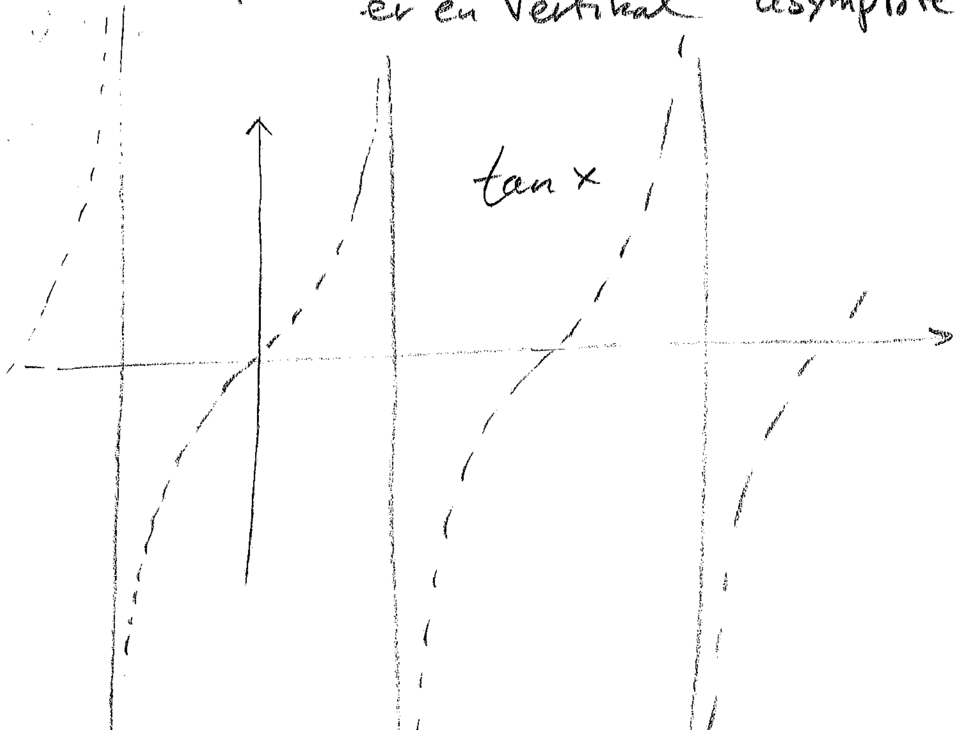


(f ikke definert i a)



$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$
ikke definert for $x \leq 0$

y-aksen $(x=0)$
er en vertikal asymptote.



$\tan x$ har uendelig mange vertikale asymptoter $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$
for alle heltall n.

Rasjonale funksjoner kan bare ha vertikale asymptoter hvor nevneren er 0. De behøver ikkje ha asymptoter der (for eksempel $\frac{x}{x}$).

Et polynom av grad n har maksimalt n nullpunkt. Rasjonale funksjoner kan derfor ikkje ha fleire vertikale asymptoter enn graden til nevneren.

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har to vertikale asymptoter: $x = -1$ og $x = 1$

nevneren faktoriseres som $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. $\quad x-1 > 0$ når $x > 1$

når $x \to 1^+$ (går mot 1 fra positiv side)

vil derfor $\left(\frac{1}{x+1}\right) \frac{1}{x-1}$ bli vilkårlig stor og positiv

Derfor er $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$ etc.

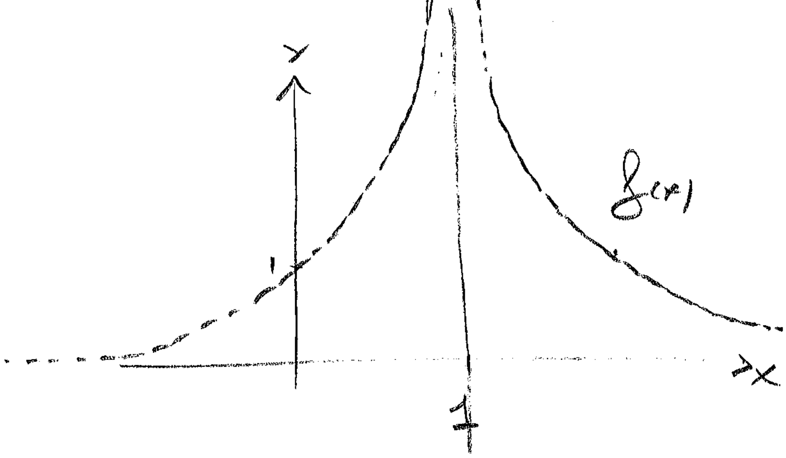
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \infty.$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$



$$f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$$

har ikkje en vertikal asymptote i $x = -2$ siden

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2} = -5$$