10. jan 2013 Horisontale og skrå asymptoter 8.4 og 8.5

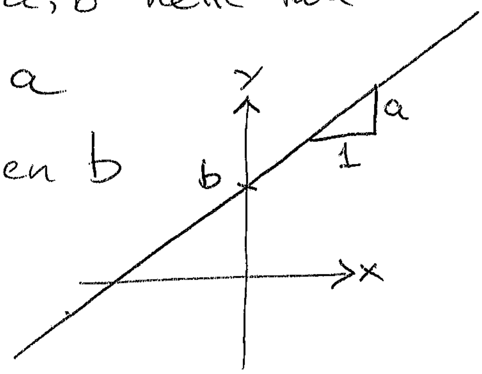
1. Grafen til $f(x) = ax + b$, a, b reelle tall

er en linje med stigningstall a

som snitter y-aksen i verdien b

Alle ikke-vertikale linjer er grafen

til en $y = ax + b$ for passende a og b.



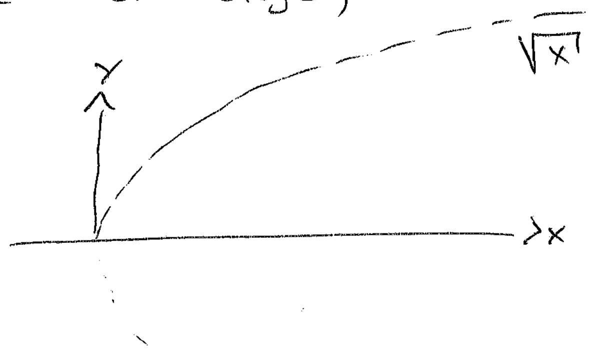
Den vertikale linjen gjennom $x = a$ er gitt ved

likningen $x = a$. (alle y er mulige)

Grafen til $y = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

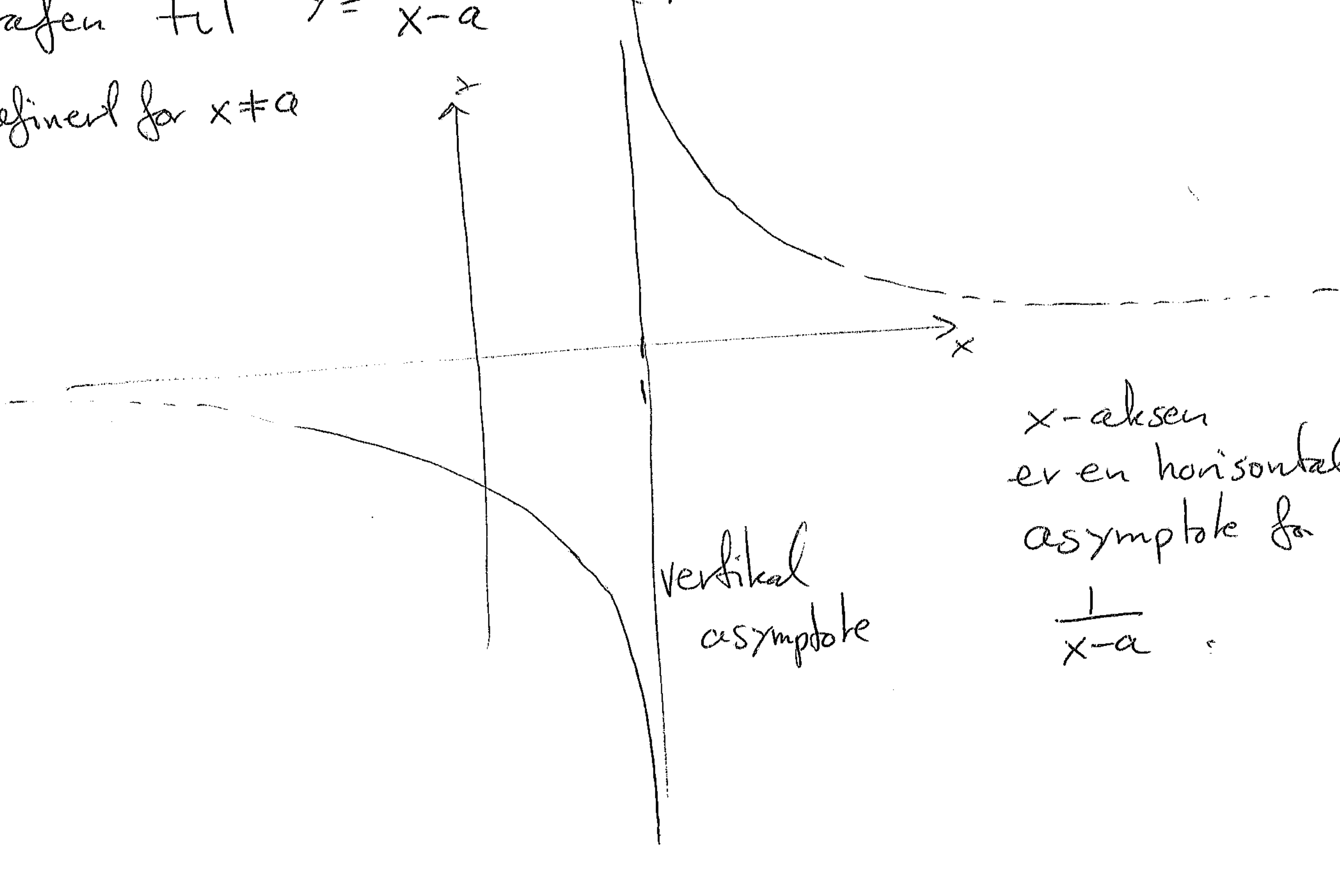
$y^2 = (\sqrt{x})^2 = x$



Grafen til $y = \frac{1}{x-a}$

definert for $x \neq a$

$\left(\frac{1}{x-1} \text{ når } a = 1 \right)$

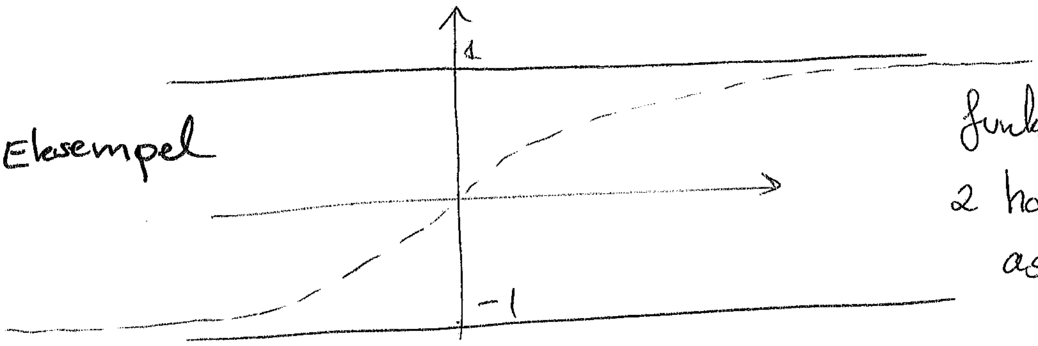


x-aksen er en horisontal asymptote for $\frac{1}{x-a}$.

(2) En horisontal linje $y = b$ er en horisontal asymptote for $f(x)$ hvis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Eksempel



funksjon med 2 horisontale asymptoter.

En funksjon har 0, 1 eller 2 horisontale asymptoter.

$\frac{p(x)}{q(x)}$ rasjonalt uttrykk. $p(x)$, $q(x)$ polynomer

Polynomdivisjon: $\frac{p(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

$\deg r < \deg q$

Hvis $\deg r(x) < \deg q(x)$, da

er $\lim_{x \to \infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$

Så $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - S(x) \right) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - S(x) \right) = 0$

③ Et rasjonalt uttrykk $\frac{p(x)}{q(x)}$ har en horisontal asymptote hvis og bare hvis

$$\deg p(x) \leq \deg q(x).$$

Den horisontale asymptoten er lik x-aksen ($y=0$) hvis og bare hvis $\deg p(x) < \deg q(x)$.

Et rasjonalt uttrykk har maksimalt en horisontal asymptote.

Eksempel $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{x^2-1}{x^3-1}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

x-aksen er en horisontal asymptote.

Nevneren $x^3-1 = (x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}^{\text{irredusibel}}$

er 0 når $x=1$

Telleren $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$f(x)$ har ingen vertikal asymptote.

[$\frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$ når $x \neq 1$

har en vertikal asymptote gitt ved $x=1$.]

(4)

$$f(x) = \frac{x^2}{2x^2-1}$$

Har horisontal asymptote gitt ved $y = \frac{1}{2}$.

$$\frac{x^2}{2x^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1/2}{2x^2-1}$$

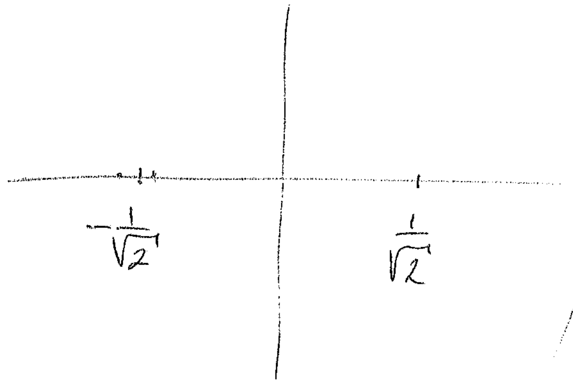
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Har $f(x)$ vertikale asymptoter? $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Siden nevneren er 0 når $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ og telleren er ulik 0 for disse x-verdiene.

$$\left(\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}^-} f(x) = \infty \right.$$

$$\left. \lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}^+} f(x) = -\infty \right)$$



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = x\,\frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1}$$

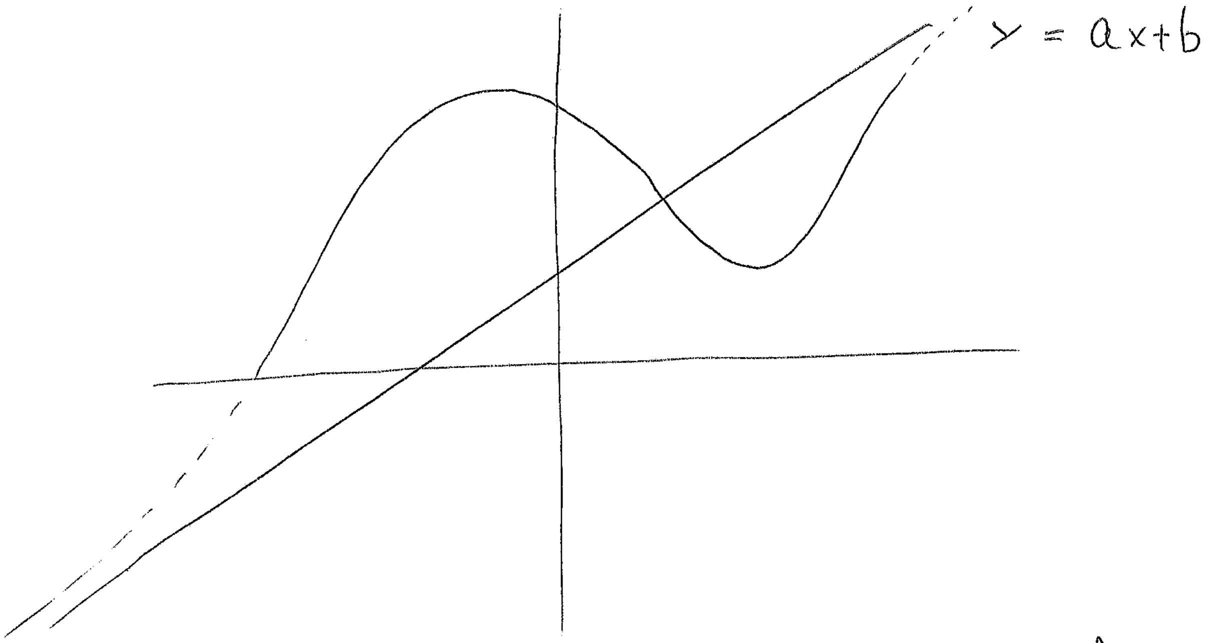
$$= x + \frac{x}{x^2-1}. \quad \text{(polynomdivisjon)}$$

$$f(x) - x = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x.$$

Linjen $y = x$ er en skrå asymptote til $f(x)$.

(5)



En linje $y = ax + b$ er en skrå asymptote for $f(x)$ hvis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

eller

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

En funksjon kan ha 0, 1 eller 2 skrå/horisontale asymptoter

En rasjonal funksjon har maksimalt en skrå asymptote. Den har en skrå asymptote som ikke er horisontal hvis og bare hvis graden til teller er lik 1 pluss graden til nevneren.

(6) Vertikale og skrå asymptoter er nyttige for å tegne grafen til en funksjon.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

Vi tegner først grafen til $y = x$ og $y = \frac{x}{x^2-1}$ hver for seg.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

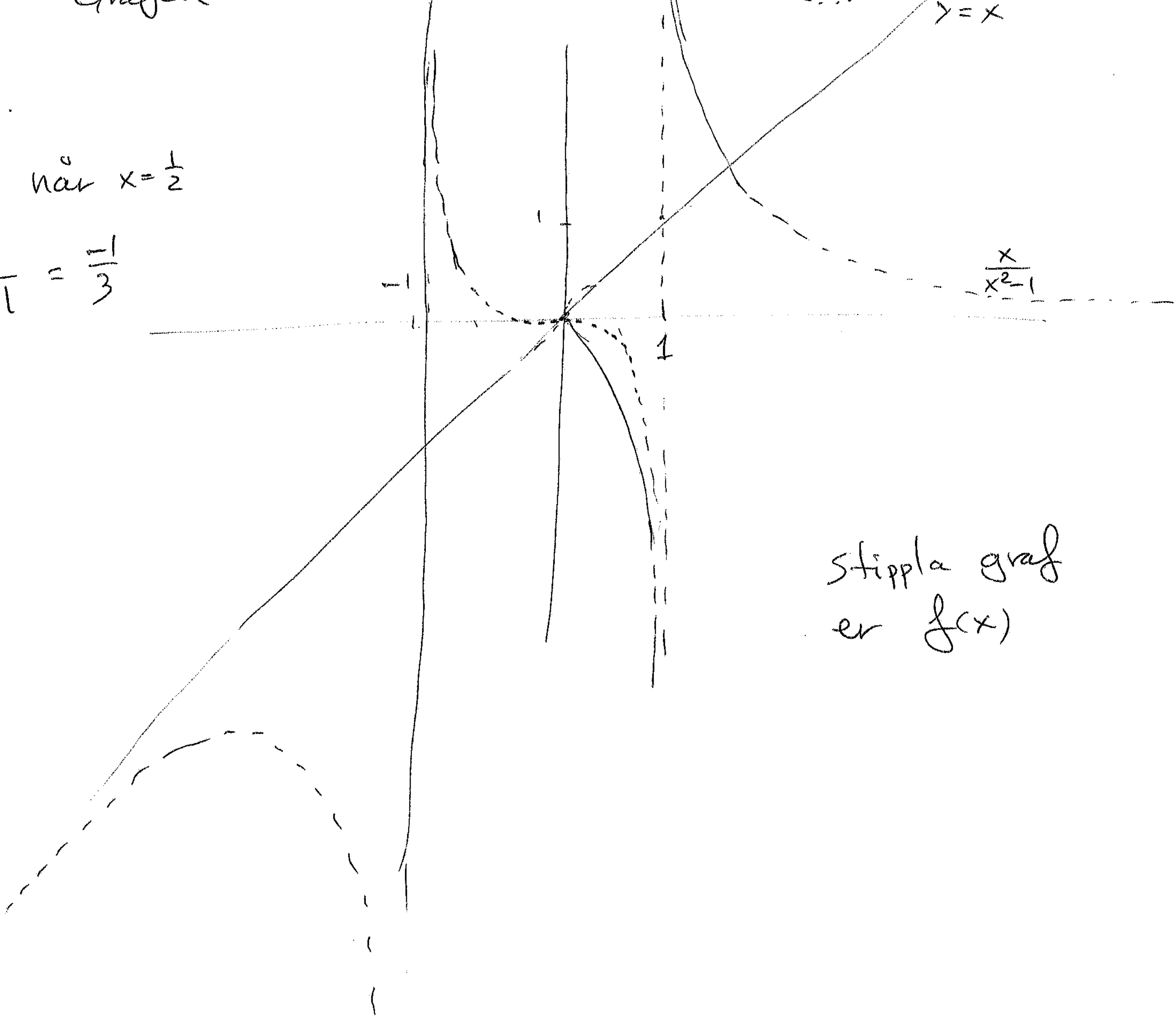
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Legg merke til $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$

Grafen til $f(x)$ er symmetrisk om origo.

$\frac{x}{x^2-1}$ når $x = \frac{1}{2}$

$\frac{1/2}{(1/2)^2-1} = \frac{-1}{3}$



stippla graf er $f(x)$

7 Finn asymptotene til

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{x} = 2x - \frac{4}{x} \qquad x \neq 0$$

$y=2x$ er den skrå asymptoten til $f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x=0$ vertikal asymptote. (dette er y-aksen)

* Finn asymptotene til

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + 3 & x \geq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & x < 1 \end{cases}$$

Vertikal asymptote $x=-1$.

$y = \frac{x}{2} + 3$ skrå asymptote (når $x \to +\infty$)

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x-1 + \frac{2}{x+1}.$$

$y = x-1$ en skrå asymptote (når $x \to -\infty$).

$f(x)$ har to skrå asymptoter.