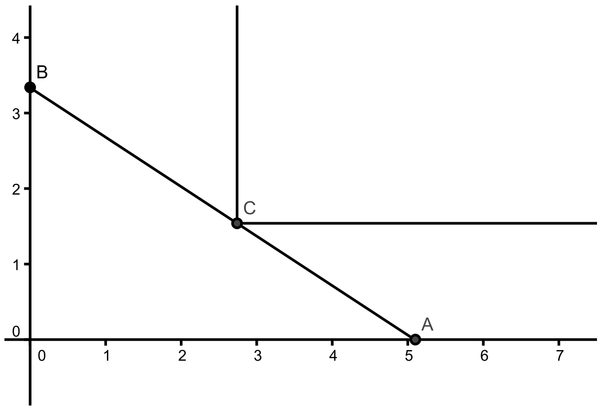
Hva er den lengste stokken som kan passere rundt et hjørne?

Hva er den lengste stokken vi kan få rundt et hjørne i en korridor? Vi krever at stokkes skal holdes horisontal hele tiden. Koridorene har bredde a og b slik at hjørnet, punktet C i figuren, har koordinat (a, b). La v være vinkelen mellom linjen AB og linjen fra A til origo.



Her er noen observasjoner. Hvis $a = b$ så blir lengden til linjestykke minst når vinklene v er lik $45°$. Lengden er da lik $2\sqrt{2}a$. Hvis den ene siden er mye større enn den andre siden så vil den lengste stokken vi får rundt hjørnet være omtrent like lang som den lengste siden. Vi skal vise at generelt så har den lengste stokken vi kan få rundt hjørnet lengde lik

$$L = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

Dette uttrykket har de riktige enhetene og det samsvarer med observasjonene ovenfor.

Vi lar A være breden og B høyden som i figuren ovenfor. Vi går ut ifra at stokken er plasert slik at $A - a > 0$ og $B - b > 0$. (Vinkelen v er da mellom 0 og 90 grader.) Vi har følgende relasjoner

$$L^2 = A^2 + B^2 \text{ og } \tan(v) = B/A = b/(A - a) = (B - b)/a.$$

Vi kan nå uttrykke L^2 ved hjelp av a, b og v. Siden

$$A = a + b/\tan(v) \text{ og } L = A/\cos(v)$$

får vi at

$$L = \frac{a + b/\tan(v)}{\cos(v)} = a/\cos(v) + b/\sin(v).$$

Den deriverte til L med hensyn til v er lik

$$a(-1)(\cos(v))^{-2}(\cos(v))' - b(-1)(\sin(v))^{-2}(\sin(v))'.$$

Dette er lik

$$\frac{dL}{dv} = \frac{a\sin^3(v) - b\cos^3(v)}{\sin^2(v)\cos^2(v)}.$$

Funksjonen er deriverbar i hele intervallet $(0, 90°)$. Når vinkelen v er nær 0 eller 90 grader blir L veldig stor. Den minste verdien blir tatt et sted mellom 0 og 90 grader (fra ekstremalverdisettningen finnes det en minste verdi). Den deriverte er lik 0 når telleren, $a\sin^3(v) - b\cos^3(v)$, er lik 0. Det skjer når $\tan^3(v) = b/a$. Minimumsverdien til L får vi når $\tan^3(v) = b/a$. Dette gir $\tan(v) = \sqrt[3]{b/a} = (b/a)^{1/3}$. Vi har at

$$1/\cos(v) = \sqrt{1+\tan^2(v)} = \sqrt{1+(b/a)^{2/3}}.$$

Den minste verdien til L er

$$L = (a + b/(b/a)^{1/3})\sqrt{1+(b/a)^{2/3}} = (a^{2/3}+b^{2/3})a^{1/3}\sqrt{1+(b/a)^{2/3}} = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}.$$

Dette viser at den lengste stokken vi kan få rundt hjørnet har lengde $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.

Hva er det lengste bordet med bredde d som kan passere rundt et hjørne?

Vi forutsetter at bordet holdes horisontalt. Vi antar at $d \leq a$ og $d \leq b$. Hvis $a = d$, da har det lengste bordet vi får forbi hjørnet lengde lik b. Hvis $a = b$ da er lengden kortest når vinklen v er 45 grader. Det lengste bordet vi får forbi hjørnet har lengde lik $2\sqrt{2}a - 2d$.

Vi velger å optimalisere lengste side som en funksjon av vinkelen v. Sett bordet inntil hjørnet C og la det være lengs mulig slik at det tar borti veggene i begge ender. Vi velger punktet E på andre siden av hjørnet $C = (a, b)$. Linjestykke mellom C og E har dermed lengde d og er vinkelrett på bordsiden som berører hjørnet C. Koordinaten til E er $(a - d\sin(v), b - d\cos(v))$. Setter vi dette inn i uttrykket for lengden på den "lengste stokken" med hjørnet E får vi

$$L = (a - d\sin(v))/\cos(v) + (b - d\cos(v))/\sin(v).$$

Den deriverte er lik

$$\frac{dL}{dv} = \frac{a\sin^3(v) - b\cos^3(v) + d(\cos^2(v) - \sin^2(v))}{\sin^2(v)\cos^2(v)}.$$

Den deriverte er lik 0 når telleren er lik 0. Det skjer når

$$a\sin^3(v) - b\cos^3(v) + d(\cos^2(v) - \sin^2(v)) = 0.$$

Dette gir en 6. gradslikning i $T = \tan(v)$

$$(aT^3 - b)^2 = d^2(1+T^2)(T^2-1)^2.$$

Her har vi benyttet at $1/\cos^2(v) = 1 + \tan^2(v)$.