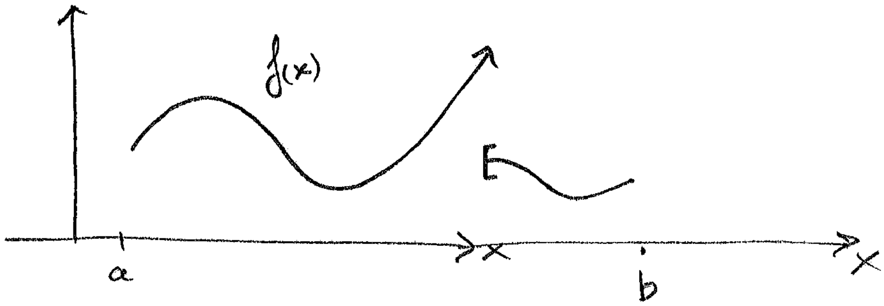
4.4.2013

Riemann Integral

① $f(x)$ definert på et intervall $[a, b]$

* $f(x)$ er ikke-negativ hvis $f(x) \geq 0$ for alle x
* $f(x)$ er begrenset hvis det finnes et (tall) N slik at $|f(x)| \leq N$ for alle x.



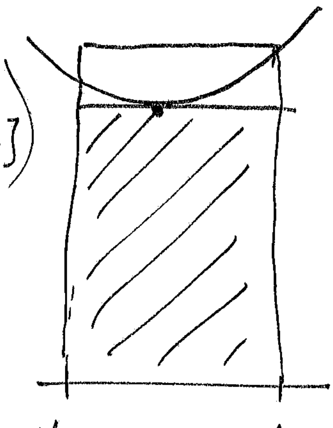
Partisjon av $[a, b]$ i n deler.

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Nedre Riemann sum

(største verdi $\leq f(x)$ for $x \in [t_{i-1}, t_i]$)

$$S^{\text{nedre}} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot \min_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$



Nedre estimat til arealet til regionen avgrenset av $f(x)$, x-aksen og $x=a$ og $x=b$.

Øvre Riemann sum

$$S^{\text{øvre}} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \operatorname*{maks}_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$

Tar grensen over alle partisjoner av $[a,b]$

(2)

S^n = grensen over alle partisjoner S^{nedre}

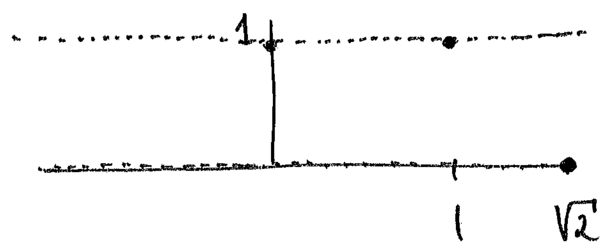
$S^ø$ = grensen over alle partisjoner $S^{øvre}$

Def. $\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer hvis

$S^n = S^ø$. Vi sier at $f(x)$ er Riemann integrerbar i $[a,b]$.

(S^n og $S^ø$ eksisterer !)
(altid for begrensa funksjoner)

Eksempel $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrasjonal} \\ 1 & x \text{ rasjonal} \end{cases}$



i alle intervaller $[t_{i-1}, t_i]$ (hvor $t_{i-1} < t_i$)
så finnes det både rasjonale tall og irrasjonale tall.

La $[a,b] = [0,1]$. For enhver gitt partisjon

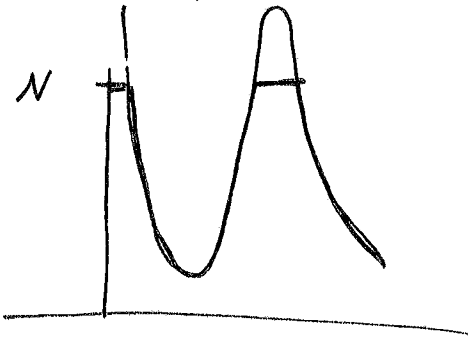
Så er $S^{øvre} = 1$
$S^{nedre} = 0$

Derfor er $S^n = 0 \neq 1 = S^ø$.

$f(x)$ er ikke Riemann integrerbar!

(3) Utvider integralbegrepet til
1) ubegrensa ikke-negative funksjoner
2) generelle funksjon

1)

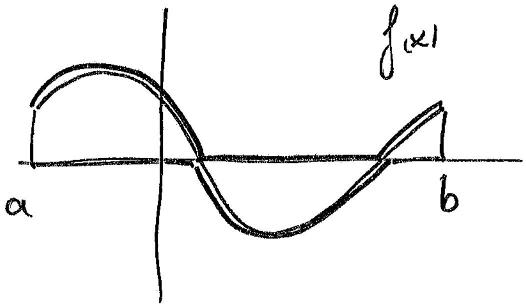


$$f^N(x) = \begin{cases} N & \text{når } f(x) \geq N \\ f(x) & \text{når } f(x) \leq N. \end{cases}$$

$f^N(x)$ er begrensa og ikke-negativ.

Def $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f^N(x)\,dx$

2)



$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{når } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

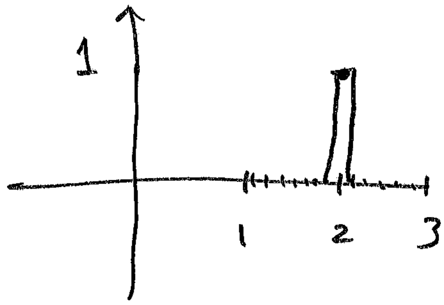
Def $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$

Integralet er lineært $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (ikke opplagt)

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$

La $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$



4

Hva er $\int_1^3 f(x)\,dx$?

Fra definisjonen er $\underline{\int_1^3 f(x)\,dx = 0}$.

Resultat: Alle kontinuerlige funksjoner på et intervall $[a,b]$ er integrerbare.

(alle slike funksjoner er begrenset)

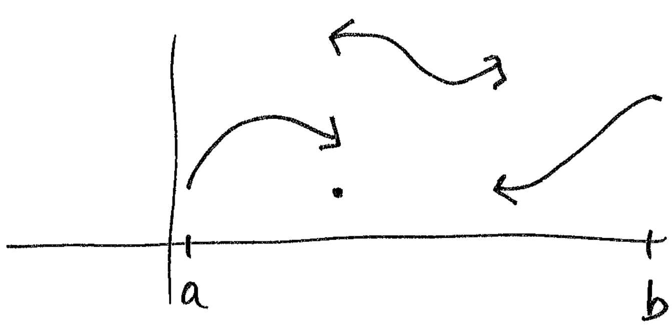
(kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$ er uniformt kontinuerlige: Det finnes en konstant K slikat $|f(x)-f(y)| < K|x-y|$ for x, y i $[a,b]$)

Dette gir at $S^{\text{øvre}} - S^{\text{nedre}} \leq (b-a) \cdot K \max_{i=1,\dots,n} (t_i - t_{i-1})$.

Derfor er $S^{ø} = S^{n}$ og integralet eksisterer.

—

Stykkevis kontinuerlige (begrensa) funksjoner kan integreres.

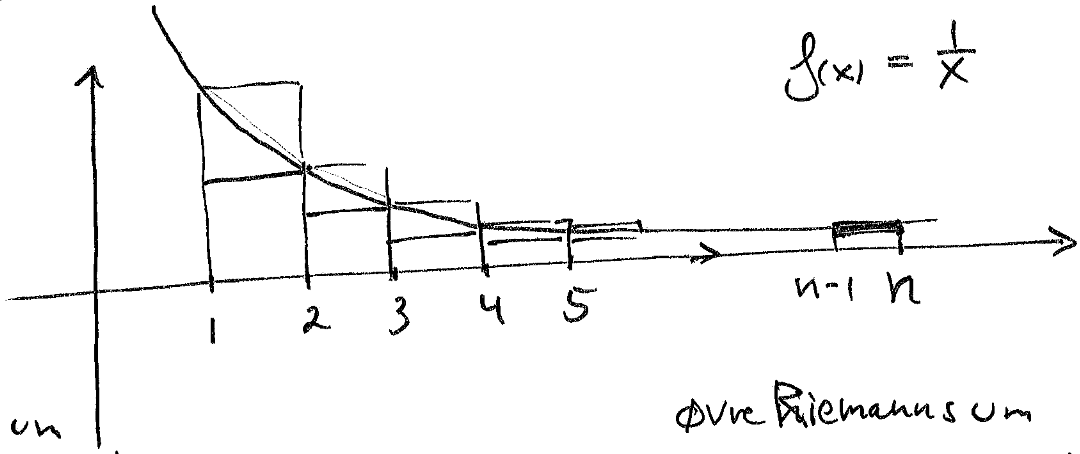


⑤ $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \left(=\frac{\pi^2}{6}\right)$ uendelig rekke

Konvergerer rekken? (Ja)

Vi ser først på den harmoniske rekken

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ divergerer!



Nedre Riemannsum

Øvre Riemannsum

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\quad+\frac{1}{n}\right) \leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}\,dx}_{\ln(n)} \leq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

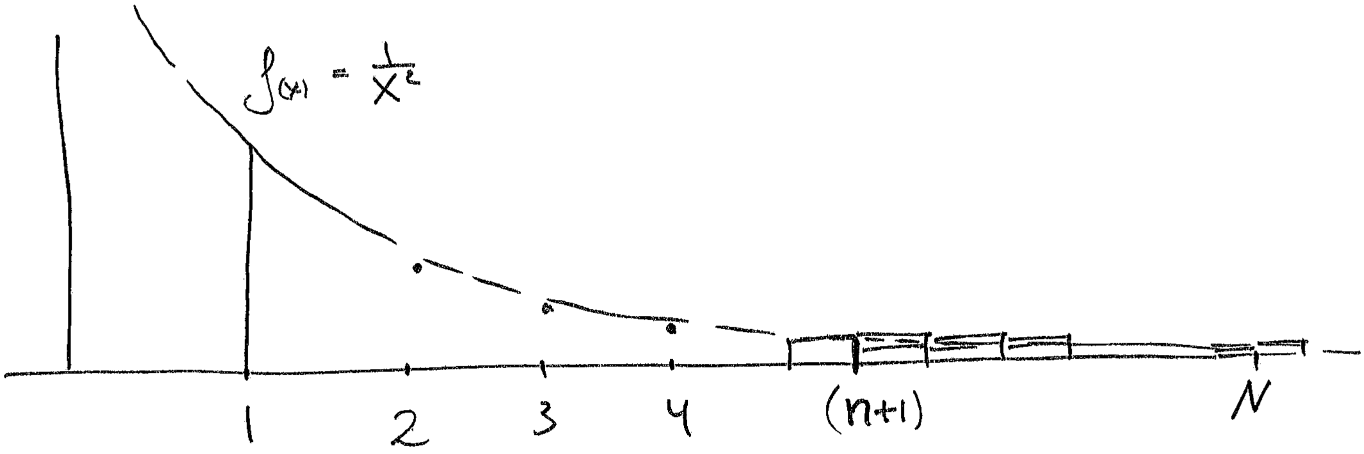
Derfor er

$$\ln(n+1) \leq \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}_{(\text{ca } 7.5 \text{ når } n=1000!)} \leq \ln(n)+1$$

siden $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$ divergerer rekken.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668\ldots$$

⑥



$$\underbrace{\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \frac{1}{N^2} \leq \underbrace{\int_n^N \frac{1}{x^2}\,dx}_{\substack{= \frac{-1}{x}\Big|_n^N \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}}}$$

tar grensen $N \to \infty$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \leq \frac{1}{n}$$

Derfor er

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \leq \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}$$

For eksempel når $n = 1000$ gir dette

$$1.64493356\ldots \leq \frac{\pi^2}{6} \leq 1.64493456\ldots$$

Vi har her brukt integraler til å estimere summen til en rekke.