Innlevering	FO929A - Matematikk forkurs HIOA
	Obligatorisk innlevering 7
Innleveringsfrist	Torsdag 18. april 2013 kl. 14:30
Antall oppgaver:	10

1

Finn den største mulige definisjonsmengden til funksjonene og deriver funksjonene.

a) $f(x) = e^{-3x+1} - \ln(2x-1) + 2$.

b) $f(x) = e^{-3x} + e^{3x} - 2$.

c) $f(x) = 1/\ln(x^2)$.

d) $f(x) = \ln(4\sqrt[5]{x^3 - 2x + 1})$.

e) $f(x) = e^{2x}/(x+2)$.

e) $f(x) = \ln(-x) \cdot \log_8 |x|$.

2

Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3e^{-\sqrt{x}/2} - 1$ for $x \geq 0$.

b) $f(x) = e^{-3x}\cos(2x)$.

c) $f(x) = x^8 \ln|x| - x^8/8$ for $x \neq 0$.

d) $f(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

e) $f(x) = \ln|\ln|x||$ for $x \neq -1, 0, 1$.

e) $f(x) = x^x$ for $x > 0$.

3

Løs følgende likninger. Gi svarene med 4 gyldige siffer.

a) $13^x = 23$.

b) $3\log(x) = 4$.

c) $3/4^{x-2} = 2/23$.

d) $\log_2(2x-1) = 3 + \log_2(x+1)$.

e) $2\log_2|x + 1/2| - \log_2|x| = 1$.

f) $\log|-5^{x+1} + 25^x| = 1$.

4

Finn de følgende ubestemte integralene.

a) $\int 4x^3 - 2/x^3\, dx$.

b) $\int \sin(x) - \cos(x) + \tan^2(x)\, dx$.

c) $\int (6x+5)/(3x-2)\, dx$.

d) $\int e^{-\pi x - 2} + e\, dx$.

e) $\int \sqrt[4]{2x+5}\, dx$.

f) $\int 3x^2(x^3+5)^4\, dx$.

5

Vi skal nå se på summen av to sinusbølger med periode $2\pi/a$ og $2\pi/b$ for to positive tall a og b. Sjekk gjerne "Geogebra: Summen av to sinusbølger" på kursets hjemmeside. Der kan dere også lytte til summen av to sinusbølger.

a) Vis følgende

$$\sin(ax) + \sin(bx) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)$$

for alle x og for alle a og b.

b) Hvordan ser grafen ut når a og b er nær hverandre men ulike? Lag en enkel skisse og forklar formen. Bruk gjerne geogebra til å lage skissen.

c) La r og s være to reelle tall. Finn en antiderivert til $\cos(sx)\sin(rx)$ med hensyn til x.

6

La $x(t)$ være mengden av et radioaktivt stoff ved tidspunkt t. Mengden som brytes ned per tidsenhet er proporsjonalt med $x(t)$. Vi har derfor differensiallikningen

$$x'(t) = -kx(t)$$

hvor $k > 0$ er en konstant.

a) Vis at løsningene er $x(t) = x_0 e^{-kt}$ hvor x_0 er en konstant som er lik mengden radioaktivt stoff ved tiden $t = 0$.

Tiden det tar før et radioaktivt stoff brytes ned til halvparten av opprinnelig mengde kalles halveringstiden og skrives $t_{1/2}$.

b) Vis at konstanten k er relatert til halveringstiden som følger

$$k \cdot t_{1/2} = \ln(2).$$

En mye brukt metode for datering av gammelt organisk materiale er C-14 metoden. Den baserer seg på at andelen av den ustabile isotopen ${}^{14}_{6}C$ i forhold til alle isotoper av karbon er omterent konstant i levende materialer. Forholdet er omlag 10^{-12} av total karbon mengde. Etter organismen dør blir det ikke tilført mer C-14 og derfor synker andelen av C-14. Isotopen ${}^{14}_{6}C$ brytes ned til ${}^{14}_{7}N$ og beta stråling (nitrogen og et fritt elektron). Halveringstiden til C-14 er omtrent 5700 år.

c) Hva er konstanten k for C-14?

d) En knokkel har et forhold mellom C-14 og C som er 0.729 av forholdet til levende organismer. Hvor lenge er det siden eieren av knokkelen døde?

e) Vi forventer en gammel pergamentrull til å være fra 1200 tallet. Hva kan vi forvente at forholdet mellom C-14 og C er i forhold til nivået til levende organismer. (Finn intervallen av verdiene.)

Les gjerne mer om C-14 på Wikipedia (det er mest informasjon på den engelsk versjonen). Det er og noe informasjon på siden NTNU.no/vitenskapsmuseet/datering.

7

La $f(x) = x^r/e^x$ for $x \geq 0$. Vi antar at $r > 0$.

a) Når er $f(x)$ størst mulig? Finn den største mulige verdien til $f(x)$.

b) Forklar hvorfor

$$\lim_{x\to\infty} x^r/e^x = 0.$$

Dette vil si at e^x vokser raskere enn enhver gitt potens x^r av x.

c) La n være et naturlig tall. Når er $g(x) = \ln(x)/\sqrt[n]{x}$ størst mulig. Hva er verdien? Bruk gjerne resultatet i a). Forklar hvorfor

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x)/\sqrt[n]{x} = 0.$$

Dette vil si at enhver n-te rot av x vokser raskere enn $\ln(x)$.

d) Finn vendepunktene til $f(x)$ uttrykt ved r.

8

La $g(x) = x^2 e^{-x}$ ha definisjonsmengde $[0, \infty\rangle$. Bestem monotoniegenskapene og konkaviteten til $g(x)$. Finn ekstremalpunktene og vendepunktene til $g(x)$. Bestem asymptotene til $g(x)$ og lag en skisse av grafen til $g(x)$.

9

La $f(x)$ være en funksjon definert på en definisjonsmengde D med egenskapen at x er et element i D hvis og bare hvis $-x$ er et element i D. Slike definisjonmengder kalles gjerne symmetriske (siden de er symmetriske om 0). Funksjonen kalles en *odde* funksjon hvis $f(-x) = -f(x)$ og en *jevn* funksjon hvis $f(-x) = f(x)$, for alle x.

Hvis vi undersøker de deriverte av x^n, for heltall n, og funksjoner som $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln|x|$, $\cosh(x)$ etc. ser det ut til at den deriverte av en odde funksjon er en jevn funksjon og at den deriverte av en jevn funksjon er en odde funksjon. Er dette sant generelt? Vis påstanden eller gi moteksempler som viser at dette av og til ikke stemmer.

10

Vi skal nå se på en harmonisk svingning med friksjon. Vi antar at friksjonen er proporsjonal til farten, med proporsjonalitetskonstant c. La k være fjærstivheten. Vi forutsette at friksjonen ikke er alt for stor ved å kreve at $c^2 < 4km$. Anta at kraften fra fjøra er 0 når $x(t) = 0$.

a) Vis at $x(t)$ tilfredstiller differensiallikningen

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Hvis friksjonskoeffisienten c er lik 0 så er perioden til svingningen $2\pi/\sqrt{k/m}$.

b) Tror du perioden blir påvirket hvis vi nå innfører friksjon. Blir den større, mindre eller uendret? (Tenk gjerne over det før dere utfører utregningen.)

Anta at $x(0) = 0$. Løsningen til differeansiallikningen under forutsettningene vi har gitt er på formen

$$x(t) = Ae^{-Bt}\sin(Dt).$$

(Det er ingen cosinus ledd siden $x(0) = 0$). Bestem B og D ut fra c og k. Hva er perioden til svingningen?

c) Farten i tiden $t = 0$ er AD. Hva er farten de neste tre gangene $x(t) = 0$, uttrykt ved A, c og k?

d) Hva tror du skjer hvis friksjonen er så stor at $c^2 \geq 4km$?