26 sep 2014

Addisjonsformlene for sin og cos

(1)

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u)$$

$$\cos(u+v) = \cos(u)\cdot\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$$

Eksempel

$$\sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sin(30^\circ)\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)\cos(30^\circ)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} \approx 0.966$$

$$\sin(u-v) = \sin(u+(-v))$$
$$= \sin(u)\underbrace{\cos(-v)}_{\cos(v)} + \underbrace{\sin(-v)}_{-\sin(v)}\cdot\cos(u)$$

$$\sin(u-v) = \sin(u)\cos(v) - \sin(v)\cos(u)$$

Tilsvarende

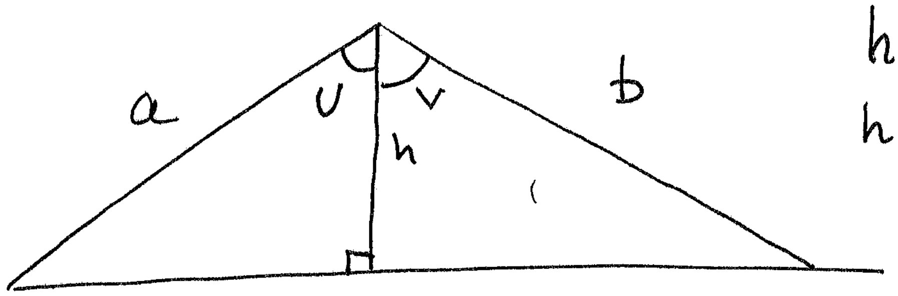
$$\cos(u-v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\cdot\sin(v).$$

oppgave Finn eksakt verdi til $\cos(15^\circ)$ hint $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$.

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos(45^\circ)\cos(30^\circ) + \sin(45^\circ)\sin(30^\circ)$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Dette er lik $\sin(75^\circ)$, som forventet, siden $\cos(v) = \sin(90^\circ - v)$

② Geometrisk bevis for addisjonsformelen for sin når vinklene er mellom 0 og 90°.



$h = b \cdot \cos(v)$

$h = a \cdot \cos(u)$

Fra arealsetningen så er arealet til den sammensatte trekanten lik

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(u+v).$$

Dette er lik ~~areale~~ summen av arealet til de to rettvinkla trekantene:

$$\frac{1}{2} b \cdot \underbrace{h}_{a \cdot \cos(u)} \cdot \sin(v) + \frac{1}{2} a \cdot \underbrace{h}_{b \cdot \cos(v)} \sin(u)$$

$$= \frac{1}{2}ab\left(\sin(v)\cos(u) + \sin(u)\cos(v)\right)$$

Deler med $\frac{1}{2}ab$:

$$\sin(u+v) = \sin(v)\cos(u) + \sin(u)\cos(v).$$

Argumentet kan utvides til å vise at dette er sant for alle vinkler u og v

(se mattenøkkelen)

(3) Addisjonsformelen hvor vi legger sammen to like vinkler:

$$\sin(x+x) = \sin 2(x)$$
$$= \sin(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\cos(x)$$

dobling av vinkel

$$\underline{\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x)$$
$$= \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$
$$\underline{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

Pytagoras: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

Derfor er $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x))$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Vi kan bestemme $\cos(x)$ opp til fortegn fra $\cos(2x)$

$$1+\cos(2x) = 2\cos^2 x \quad \text{(deler med 2)}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \text{ eller } -\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Tilsvarende $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

(4) Vi finner $\cos(15°)$ ved å halvere $30°$.

$$\cos(15°) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\cdot 15°)}{2}}$$ må være positiv

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}$$

$$\cos(15°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(Dette er lik $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Legg merke til at $(1+\sqrt{3})^2 = 1^2+\sqrt{3}^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{3}$
$= 4+2\sqrt{3} = 2\cdot(2+\sqrt{3})$

Derfor er $1+\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot(2+\sqrt{3})} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$)

oppgave. Finn $\sin(22{,}5°)$ $\left(22.5 = \frac{45}{2}\right)$

$$\sin^2(22{,}5°) = \frac{1-\cos(2\cdot 22{,}5°)}{2} = \frac{1-\cos(45°)}{2}$$

$$= \frac{(1-1/\sqrt{2})\cdot 2}{(2)\cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

$\sin(22{,}5) > 0$, så $\sin(22{,}5°) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$

$$\sin(22{,}5°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(5) $\sin(x+45^\circ) = \sin x \cdot \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \cdot \cos x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$$

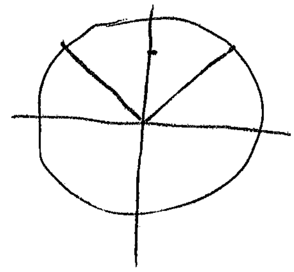
Løs likningen

$$\underbrace{\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x} = \sqrt{2}.$$ (addisjons-formelen)

$$2 \cdot \sin(x+60^\circ) = \sqrt{2}$$

$$\sin(x+60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La $x+60^\circ = v$



$$\sin(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Løsningen er $v = 45^\circ + 360^\circ \cdot n$

$v = 135^\circ + 360^\circ \cdot n$ $\quad$ n heltall.

Erstatter v med $x+60^\circ$. $\quad$ $x = v - 60^\circ$.

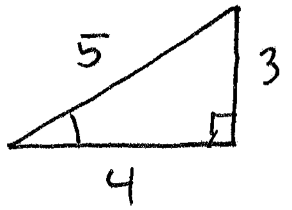
Løsningen til likningen er

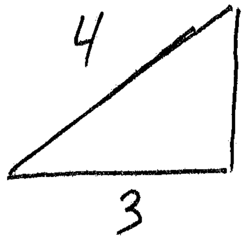
$$x = -15^\circ + 360^\circ \cdot n$$

$$x = 75^\circ + 360^\circ \cdot n$$

(oppg. selv prøve på svaret...)

6. Bestem alle rettvinkla trekanter hvor to av sidene har lengde 3 og 4.





$\sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$

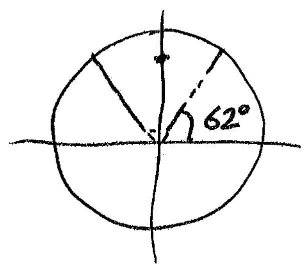
Bestem trekantene ABC slik at

$c = AB = 5$ $\quad a = BC = 4$

$\angle A = 45^\circ$

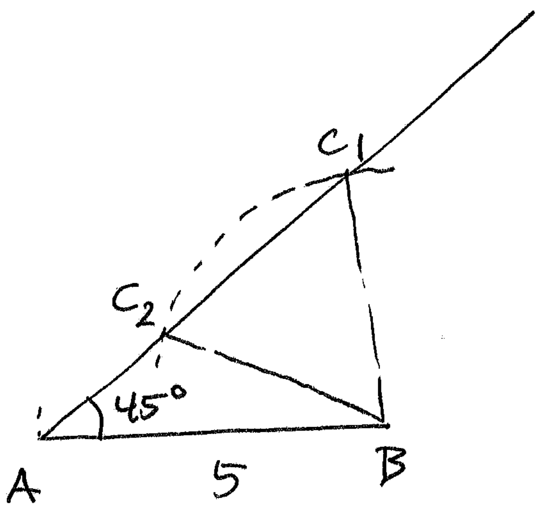
Sinussetningen $\quad \frac{\sin(45^\circ)}{4} = \frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$

$\sin(\angle C) = \frac{5}{4} \cdot \sin(45^\circ) = \frac{5}{4\sqrt{2}}$



$\angle C_1 = 62,1^\circ$

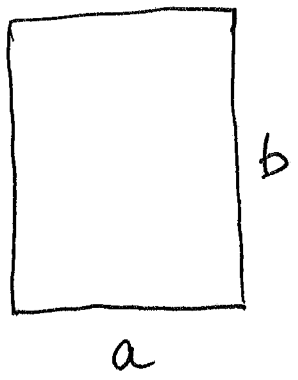
og $\angle C_2 = 117.9^\circ$



To forskjellige trekanter har disse egenskapene.

Bevis oppgavene i oblig 1

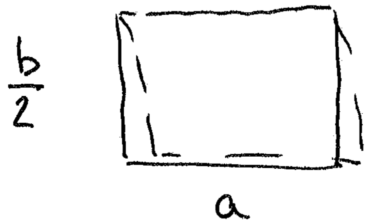
16.



Hva er forholdet

$$\frac{\text{Lang side}}{\text{Kort side}} = \frac{b}{a}$$

for at forholdet skal være det samme etter vi bretter arket?



Forholdet $\frac{\text{Lang side}}{\text{Kort side}} = \frac{a}{b/2}$.

Vi krever at disse forholdene skal være lik

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/2} = \frac{2a}{b} \quad \text{ganger med } \frac{b}{a}$$

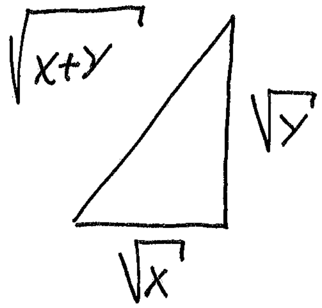
$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$$

Så $\underline{\frac{b}{a} = \sqrt{2}}$ (siden forholdet er positivt)

⑧

oppg. 18

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$$



Geometrisk bevis:

summen av lengden til katetene må være lengre enn hypotenus.

Alternativt: ved oppg 17 så er utsagnet

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ekvivalent til $\quad x+y = \left(\sqrt{x+y}\right)^2 < \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$

siden $\quad \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y}$

$$= x + y + 2\sqrt{x \cdot y}$$

så er denne påstanden sann for alle positive x og y. Vi konkluderer med at

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

er sant for alle positive x og y.