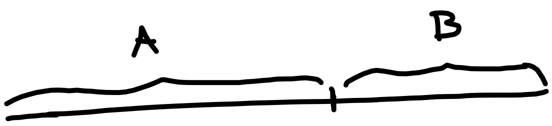
Fibonacci tall

$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,
144, 233, 377, 610, ...

Forholdet til det gylne snitt.



$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}$$

vi kaller dette forholdet x

$$x = \frac{A}{A} + \frac{B}{A} = 1 + \frac{1}{A/B} = 1 + \frac{1}{x}$$

Så $\underline{x^2 = x + 1}$ Løser 2gradslikningen

abc. formel $x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\ldots = 1 - \varphi = \dfrac{-1}{\varphi}$

("fi" gresk for latinsk f)

(Siden $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} = \dfrac{1-(\sqrt{5})^2}{4} = -1$)

siden $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$

$S_n = \varphi^n \qquad T_n = \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$

$(\varphi^2 = \varphi + 1)\,\varphi^{n-2}$ tilsvarende

$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$

$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \qquad T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$

$n \geq 2 \qquad n \geq 2$

ganger med a og med b

og tar summen:

$a \cdot S_n + b T_n = (a \cdot S_{n-1} + b \cdot T_{n-1}) + (a \cdot S_{n-2} + b \cdot T_{n-2})$

Vi kaller denne tallfølgen X_n.

$X_0 = a \cdot S_0 + b \cdot T_0 = a\,\varphi^0 + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^0 = \underline{a+b}$

$X_1 = a \cdot S_1 + b \cdot T_1 = a \cdot \varphi + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = \underline{a\varphi + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)b}$

Siden $\{X_n\}$ og Fibonacci tallene $\{F_n\}$ tilfredstiller samme rekursive formel er dei like for alle n hvis $X_0 = F_0$ og $X_1 = F_1$

Vi bestemmer a og b slik at dette er sant

$X_0 = a + b = 0 = F_0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$

$X_1 = a \cdot \varphi + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 1 = F_1$ setter inn for b

$a\varphi + (-a)\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = a\left(\varphi - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)\right) = a\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$

$a = \frac{1}{\varphi + 1/\varphi}$

Derfor er $F_n = \frac{1}{\varphi + 1/\varphi}\left(S_n - T_n\right) = \underline{\underline{\frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\varphi + 1/\varphi}}}$

oppgave.

Bestem x_n slik at

$x_0 = 3, \; x_1 = 4$ og $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ $n \geq 2$

$a + b = x_0 = 3$ $\qquad a = 3 - b$

$\varphi a + \left(\frac{-1}{\varphi}\right) b = x_1 = 4$ $\qquad$ setter inn:

$$(3-b)\varphi + \left(\frac{-1}{\varphi}\right) b = 4$$

$$b\left(-\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) = 4 - 3\varphi$$

$$b = \frac{3\varphi - 4}{\varphi + 1/\varphi}$$

($a = 3 - b$ settes inn:

$$x_n = 3\varphi^n + \left(\frac{3\varphi-4}{\varphi+1/\varphi}\right)\left(-\varphi^n + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)$$ ikke så bra)

Vi forsøker en gang til ved å skrive om $a = 3 - b$ som $3 - \frac{3\varphi - 4}{\varphi + 1/\varphi}$

$$a = \frac{3\varphi + 3/\varphi - (3\varphi - 4)}{\varphi + 1/\varphi} = \frac{3/\varphi + 4}{\varphi + 1/\varphi}$$

$$x_n = \left(\frac{3/\varphi + 4}{\varphi + 1/\varphi}\right)\varphi^n + \left(\frac{3\varphi - 4}{\varphi + 1/\varphi}\right)\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$

Vi ser på rekken tilordnet Fibonacci tallfølgen

$S_n = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ delsummene.

Vi finner verdien til de første delsummene og sammenlikner med Fibonacci tallene

$S_0 = 0 \quad = 1 - 1 \quad = F_2$

$S_1 = 0+1 = 1 \quad = 2 - 1 \quad = F_3 - 1$

$S_2 = S_1 + 1 = 2 \quad = 3 - 1 \quad = F_4 - 1$

$S_3 = S_2 + 2 = 4 \quad = 5 - 1 = F_5 - 1$

$S_4 = S_3 + 3 = 7 \quad = 8 - 1 = F_6 - 1$

$S_5 = S_4 + 5 = 12 \quad = 13 - 1 = F_7 - 1$

$S_6 = S_5 + 8 = 20 \quad = 21 - 1 = F_8 - 1$

$S_7 = S_6 + 13 = 33 \quad = 34 - 1 = F_9 - 1$

Hyptese: Kan $S_n = F_{n+2} - 1$ for alle n?

Vi viser dette ved bruk at matematisk induksjon. Vi ser at formelen stemme for $n=0$ (faktisk opp til $n=7$). Vi ønske å syne at hvis formelen er sann for n da må den også være sann for $n+1$. Den må da være sann for alle n.

Anta $S_n = F_0 + F_1 + \cdots F_n = F_{n+2} - 1$

Da er $S_{n+1} = \underbrace{F_0 + F_1 + \cdots + F_n}_{\text{Fra antakelsen } F_{n+2}-1} + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$

$= \underbrace{F_{n+2} + F_{n+1}} - 1$

$= F_{n+3} - 1$

$= F_{(n+1)+2} - 1$

Så formelen er også sann for $n+1$.

(Sann for $n=0$) $\Rightarrow$ (Sann for $n=1$) $\Rightarrow$ (Sann for $n=2$) $\Rightarrow$ ... etc så Sann for alle n!

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$