(1)

Fork 1100 Matte forkurs

Oblig 4 2. desember 2019

Løsningsforslag

1 a)

$$2x^2 + 3x - 2$$

Vi benytter annengradsformelen og finner røttene til polynomet.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$ så røttene er $\frac{-3-5}{4} = -2$ og $\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

Faktorisering er derfor $2x^2 + 3x - 2 = 2(x+2)(x - \frac{1}{2})$

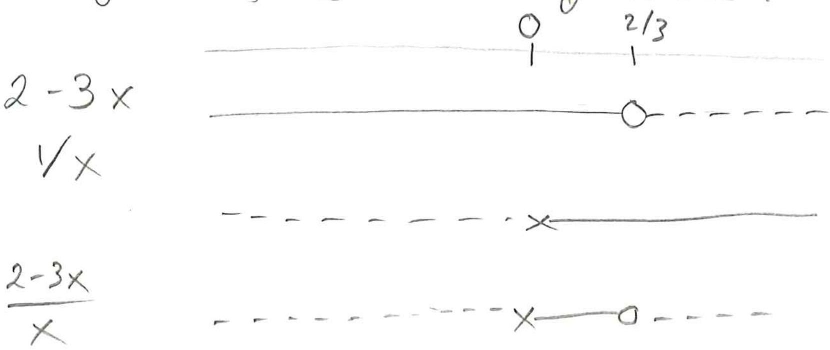
$$= (x+2)(2x-1)$$

b)

$$\frac{2}{x} \leq 3$$

Vi finner en felles nevner og samler alle uttrykk på venstre side av ulikheten: $\frac{2}{x} - \frac{3x}{x} \leq 0 \iff \frac{2-3x}{x} \leq 0$

Vi finner fortegnet til faktorene i uttrykket



Løsningsmengden er $\langle -\infty, 0 \rangle \cup [2/3, \infty \rangle$

(2)

c) La pengemengden til Grethe og Sigrid være G og S. Opplysningene kan da uttrykkes som

$$G + S = 1200\,kr$$

$$S = G + 40\% \cdot G$$
$$= (1{,}4)\,G.$$

Dette gir

$$G + (1{,}4)G = 2{,}4\,G = 1200\,kr$$

så $G = \frac{1200\,kr}{2{,}4} = \underline{500\,kr}$

$S = (1{,}4) \cdot 500\,kr = \underline{700\,kr}$

Grethe har 500kr og Sigrid har 700 kr.

c) $2x - 4y = -7$ og $-3x + 2y + 5z = 0$
$3x - y = 2$

Vi løser dette systemet av to likninger og to ukjente først for x og y, og finner deretter z.

$y = 3x - 2$

setter inn for y: $2x - 4(3x-2) = -7$
$2x - 12 \cdot x + 8 = -7$
$-10x = -7 - 8 = -15$ så $x = \frac{15}{10} = \underline{1{,}5}$

$y = 3(1{,}5) - 2 = \underline{2.5}$

$5z = 3x - 2y = 4{,}5 - 5 = -0{,}5$ så $\underline{z = -1/10}$

Likningssystemet har én løsning. Den er $\underline{(x,y,z) = (1.5,\,2{,}5,\,-0.1)}$

(3)

1 d) Irrasjonal likning $\sqrt{x^2+21} = -2x$

Løsningene til likningen er også løsninger til likningen

$$\left(\sqrt{x^2+21}\right)^2 = (-2x)^2$$

$$x^2+21 = 4x^2$$

$$21 = 3x^2$$

Så $x^2 = 7$ og $x = \pm\sqrt{7}$.

Visjekker for falske løsninger:

$x = \sqrt{7}$ VS: $\sqrt{7+21} = \sqrt{7 \cdot 4} = 2\sqrt{7}$ HS: $-2\sqrt{7}$ Falske

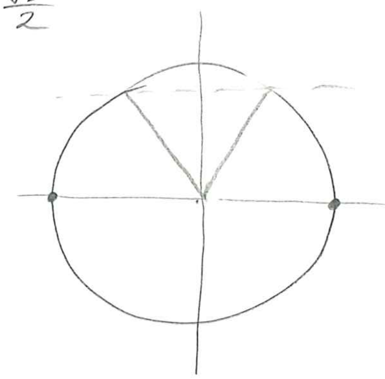
$x = -\sqrt{7}$ V.S . . . $2\sqrt{7}$ HS $= -2(-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$ ✓

Løsningen er $\underline{\underline{x = -\sqrt{7}}}$

e) $\sqrt{3}\,\sin v = 2\sin^2 v$ $0 \leq v \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow$ $2\sin v \left(\sin v - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin v = 0$ eller $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sin v = 0$ har løsningene $v = 0, \pi$ og 2π

$\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ har løsningene

$v = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$

og $v = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$

Løsningene er derfor $\underline{\underline{v \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi\right\}}}$

(4)

1 f) $x + x^2 + \cdots = x(1 + x + x^2 + \cdots)$

konvergerer for $|x| < 1$.

Summen er da lik $x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

$\frac{x}{1-x} = 10$ gir

$x = 10(1-x) = 10 - 10x$

$11x = 10$ og $x = \frac{10}{11}$

Kvotienten må vær lik $x = \frac{10}{11}$

2 a) $\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 - 1}$

Nevneren faktoriseres som $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Vi sjekker om noen av disse faktorene deler telleren.

$x - a$ deler $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

$x-1$: $1^3 + 2 \cdot 1 + 3 = 6 \neq 0$, $x-1$ deler ikke telleren

$x+1 = x-(-1)$: $(-1)^3 + 2(-1) + 3 = 0$ så $x+1$ deler x^3+2x+3.

Vi finner kvotienten ved polynom divisjon:

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 0 + 2x + 3 : x + 1 = x^2 - x + 3 \\
x^3 + x^2 \\
\hline
\quad -x^2 + 2x + 3 \\
\quad -x^2 - x \\
\hline
\qquad 3x + 3 \\
\qquad 3x + 3 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

→

⑤

Vi forkorter det rasjonale uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{x^3+2x+3}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+3)}{(x+1)(x-1)} = \underline{\frac{x^2-x+3}{x-1}}$$

(når $x \neq -1$)

2b) $$\frac{3x^2+2}{x-4} \geq x$$

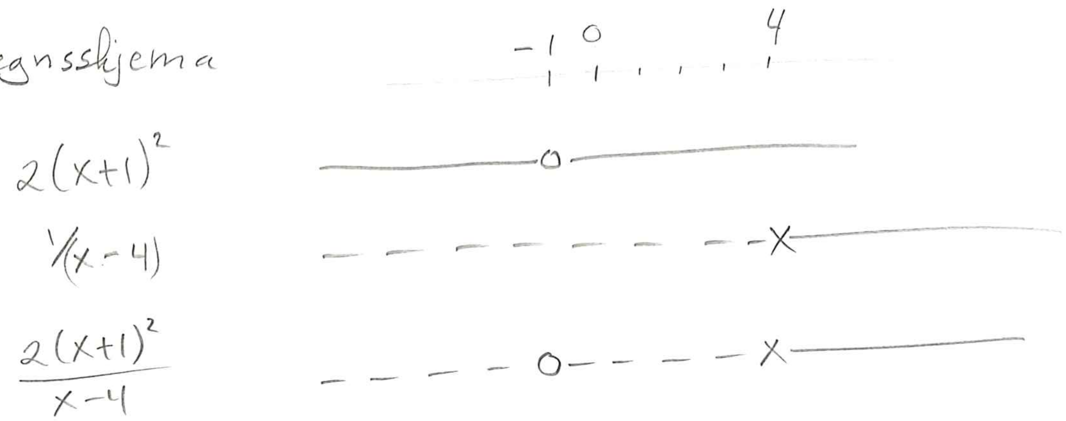
Vi finner felles nevner og samler uttrykkene på venstre side av ulikhetstegnet.

$$\frac{3x^2+2}{x-4} - \frac{x(x-4)}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{3x^2+2-x^2+4x}{x-4} \geq 0 \iff \frac{2x^2+2+4x}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{2(x^2+2x+1)}{x-4} \geq 0 \iff \frac{2(x+1)^2}{x-4} \geq 0$$

Fortegnsskjema



Løsningsmengden er

$$\underline{x \in \{-1\} \cup \langle 4, \infty \rangle}$$

2c) $X+3 = X-(-3)$ deler polynomet

$$P(x) = -2x^2 + ax + 3$$

presis når $P(-3) = 0$

$$-2(-3)^2 + a(-3) + 3 = 0$$

$$-2 \cdot 3^2 - 3a + 3 = 0 \quad \text{deler med 3}$$

$$-2 \cdot 3 - a + 1 = 0$$

$$\underline{a = 1 - 6 = -5}$$

(Faktoriseringen er da: $-2x^2 - 5x + 3 = -(x+3)(2x-1)$)

3

$$\frac{1^3-1}{6} = 0$$

$$\frac{2^3-2}{6} = \frac{8-2}{6} = 1$$

$$\frac{3^3-3}{6} = \frac{27-3}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{4^3-4}{6} = \frac{64-4}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

og $\frac{5^3-5}{6} = \frac{125-5}{6} = 20$

Vi faktoriserer $x^3 - x = x(x^2-1) = (x-1)x(x+1)$

For alle heltall x er $x^3 - x$ et produkt av tre etterfølgende heltall. Minst ett av dem er delelig med 3, og minst ett av dem er delelig med 2. Derfor er produktet $x^3 - x$ delelig med $2 \cdot 3 = 6$ for alle x.

4 a) $35 + 36 + \cdots + 70 = \sum_{k=35}^{70} k$.

Dette er en aritmetisk rekke.

Summen er differansen $\left(\sum_{k=1}^{70} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{34} k\right)$

$= \frac{70 \cdot 71}{2} - \frac{34 \cdot 35}{2}$

$= 35 \cdot 71 - 17 \cdot 35 = 35(71-17)$

$= 35 \cdot 54 = 1750 + 35 \cdot 4 = 1750 + 140$

$= \underline{\underline{1890}}$

b) $a_1 = 4$ $a_3 = \frac{1}{9}$

$a_n = a_1 k^{n-1}$

Dette gir $\frac{a_3}{a_1} = k^2$

Så $k^2 = \frac{1}{4 \cdot 9} = \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)^2$

$\underline{k = +\frac{1}{6}}$ og $\underline{k = \frac{-1}{6}}$.

Summen når kvotienten $k = \frac{1}{6}$ er $4 \cdot \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{4 \cdot 6}{6-1} = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$

$k = \frac{-1}{6}$ er $4 \frac{1}{1 + 1/6} = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$

(8)

4c Den n-te delsum

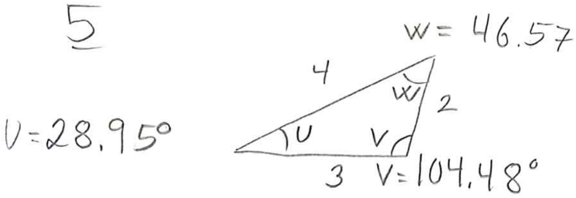
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

er større enn eller lik (antall ledd)·(verdi til minste ledd)

$$S_n \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Derfor vil S_n bli vilkårlig stor når n øker. Rekken vil derfor ikke konvergere, så den divergerer.

5



Kosinussetningen gir

$$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cos(V)$$

$$16 - 9 - 4 = 3 = -4\cdot 3\cos(V)$$

Derfor må $\cos(V) = \frac{-1}{4}$ $\qquad 0 \leq V \leq 180°$

$$V = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$\underline{V \simeq 104.48°}$$

Sinussetningen gir $\frac{\sin U}{2} = \frac{\sin V}{4}$

$\sin U = \frac{1}{2}\sin V$ så $U = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin V\right)$

$$\underline{U = 28.955°}$$

Summen av vinklene er 180° så dette bestemmer w.
La oss heller finne w ved bruk av sinussetningen

$\frac{\sin w}{3} = \frac{\sin V}{4}$ så $\sin w = \frac{3}{4}\sin(V)$

$$\underline{w = \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin V\right) = 46.57°}$$

(9)

6 a) $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$ så

$\vec{OC} = \vec{OD} - \vec{CD}$

$= [2,1,-6] - [3,-2,3]$

$\vec{OC} = [-1,3,-9]$

Derfor er koordinaten $\underline{C(-1,3,-9)}$

b) $\vec{u} = [2,3,-4]$, $\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v}) - \vec{u} = [1,1,1] - [2,3,-4]$

$\vec{v} = [-1,-2,5]$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$, hvor θ er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = [2,3,-4] \cdot [-1,-2,5] = -2-6-20 = -28$

$|\vec{u}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ og $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

$\cos(\theta) = \dfrac{-28}{\sqrt{29}\sqrt{30}} \sim -0.949\ldots$

$\theta = 161.7°$

c) En retningsvektor til snittlinjen er parallell til kryssproduktet mellom normalvektorene til plana. Fra likningene til plana leser vi av normalvektorene $n_1 = [1,0,-4]$ og $n_2 = [1,1,-1]$.

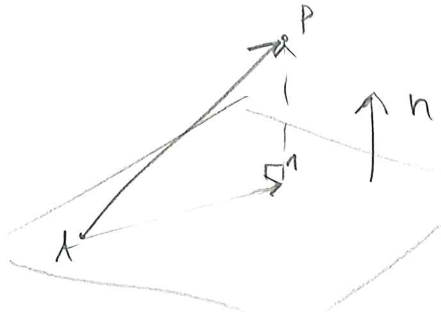
Kryssproduktet deres er $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \left[\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] = [4,-3,1]$

Vi finner et felles punkt på begge linjene.
Vi forsøker å finne snittpunktet med yz-planet og setter $x=0$. Dette gir $x=0$, $y=0$ og $z=-3$

En parametrisering er derfor $[x,y,z]=[0,0,-3]$
$+t[4,-3,1]$

d) Korteste avstand mellom planet $2x-3y+4z=4$ og $P(1,1,-1)$. Vi har at $A(2,0,0)$ ligger i planet.
Korteste vektor er komponenten til $\vec{AP}$ langs en normalvektor til planet.



En normal vektor til planet er $\vec{n}=[2,-3,4]$.
$\vec{AP}=\vec{OP}-\vec{OA}=[1,1,-1]-[2,0,0]$
$\vec{AP}=[-1,1,-1]$.

Komponenten til $\vec{AP}$ langs $\vec{n}$ er

$\dfrac{\vec{AP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$. Lengden til denne vektoren er lik

$$\frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|[-1,1,-1]\cdot[2,-3,4]|}{|[2,-3,4]|}$$

$$=\frac{|-2-3-4|}{\sqrt{4+9+16}}=\underline{\frac{9}{\sqrt{29}}}\sim 1.67$$

Avstanden mellom P og planet er $\underline{\dfrac{9}{\sqrt{29}}}$

11

6 e) Linjen gjennom $A(-1,2,5)$ med retnings vektor $\vec{v} = [1,-2,-1]$ er parametrisert ved

$$[x,y,z] = \vec{OA} + t\vec{v}$$
$$= [-1,2,5] + t[1,-2,-1] = \underline{[-1+t, 2-2t, 5-t]}$$

Et punkt $P(x,y,z)$ på linja har avstand 2 til $B(-2,2,4)$ hvis $|\vec{BP}| = 2 \Leftrightarrow |\vec{BP}|^2 = 4$.

$$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = [x+2, y-2, z-4]$$
$$= [1+t, -2t, 1-t].$$

$$|\vec{BP}|^2 = 4 \Leftrightarrow (1+t)^2 + (-2t)^2 + (1-t)^2 = 4$$
$$1+2t+t^2 + 4t^2 + 1-2t+t^2 = 4$$
$$2 + 6t^2 = 4$$

så $t^2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$, og $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dette gir to punkter på linjen med avstand 2 til B:

$$\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 5-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

og $\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2+\frac{2}{\sqrt{3}},\ 5+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$