Prøve i	Fork1100 Matematikk
Dato:	30. november 2020
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	6 (20 deloppgaver)
Antall sider:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling, lærebok, notater og Kalkulator

Svarene skal grunngis. Svarene skal gis eksakt hvor det er mulig. Alle deloppgaver teller like mye. Lever besvarelsene til halvard.fausk@oslomet.no som en pdf fil innen kl 14.

Oppgave 1. a) Skriv uttrykket enklest mulig

$$(1 + 2x + 4x^2)(1 - 2x) + (2x)^3$$

LF: Vi ganger ut og får

$$(1+2x)(1-2x) + 4x^2(1-2x) + (2x)^3 = 1 - 4x^2 + 4x^2 - 8x^3 + 8x^3 = \underline{1}$$

b) Faktoriser polynomet

$$6x^2 - 7x + 1$$

LF: Vi kan finne røttene til polynomet ved abc-formelen

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 5}{12}$$

så røttene er $x = 1$ og $x = 1/6$. Faktoriseringen er derfor

$$6x^2 - 7x + 1 = \underline{6(x-1)(x-1/6) = (x-1)(6x-1)}$$

Dette kan man også lett finne ved å prøve seg litt frem. Merk at $6 = (-1)(-6)$ og $-7 = -6 + (-1)$.

c) Løs ulikhetene

$$0 \leq \frac{1}{x-2} \leq 1$$

Den første ulikheten

$$0 \leq \frac{1}{x-2}$$

er ekvivalent til $x - 2 > 0$. Det er ekvivalent til $x > 2$.

Vi ser nå på den andre ulikheten. Vi gjør den om til et spørsmål om fortegn

$$0 \leq 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

Denne ulikheten er oppfylt presis når $x \geq 3$ eller $x < 2$, da har teller og nevner samme fortegn (eller telleren er lik 0).

Løsningen til den doble ulikheten er x slik at begge ulikhetene er oppfylt. Det er alle x slik at $\underline{x \geq 3}$.

d) En vare koster opprinnelig 1000 kroner. Varen skal selges med rabatt for 900 kroner på "cybermonday". Dette er 10% rabatt. Det høres lite ut, derfor skal prisen på varen økes slik at varen kan selges for 900 kroner med 40% rabatt. Hvor mange prosent må prisen på varen først settes opp?

LF. La r være faktoren som prisen skal endres med. Etter prsiøkningen er derfor prisen $1+r$ ganget med opprinnelig pris. Etter at 40% er tatt av prisen står vi igjen med $1-0.4 = 0.6$ ganger opprinnelig pris. Vi får derfor at

$$1000(1+r)\cdot 0.6 = 900$$

Dette gir

$$1 + r = \frac{900/1000}{0.6} = \frac{0.9}{0.6} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Derfor er $r = 0.5 = 50\%$. Derfor må vi <u>øke prisen med 50%</u> før salget på "cybermonday".

e) Løs likningen

$$\sqrt{x-3} = x - 5$$

LF: Vi kvadrerer begge sider av likheten. Løsningen til likningen må derfor også oppfylle likningen

$$x - 3 = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

Dette er andregradslikningen

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

Siden $-11 = -4 - 7$ og $28 = (-4)(-7)$ så faktoriserer dette uttrykket som

$$(x-4)(x-7) = 0$$

Vi får derfor løsingene $x = 4$ og $x = 7$. Løsningene til den opprinnelige likningen ligger alle blant disse løsningene. Vi tester hvem av dem som tilfredstilller likningen vår:

Når $x = 7$ får vi 2 på begge sider av likhetstegnet, men når $x = 4$ får vi 1 på venstre side og -1 på høyre side. Derfor er $x = 4$ en "falsk løsning". <u>Løsningen til likningen er $x = 7$</u>.

f) Finn alle løsningene til likningen

$$\sqrt{3}\sin v = \cos v$$

hvor $0 \leq v \leq 2\pi$ (radian)

LF: Hvis $\cos v = 0$, da må $\sin v = \pm 1$, og vi har derfor ingen løsning. Vi kan derfor anta at $\cos v \neq 0$. Likingen er da ekvivalent til

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Løsningne er

$$v = \arctan(1/\sqrt{3}) + \pi n = \pi/6 + \pi n$$

I den oppgitte intervallen er derfor $\underline{\text{løsningene } v = \pi/6 \text{ og } v = 7\pi/6}$.

g) Finn alle løsninger til likningen

$$\sin(2x) = \sqrt{3}/2$$

hvor $0 \leq x \leq 2\pi$.

LF: Vinkelen er $v = 2x$. Løsningene er $v = \pi/3 + 2\pi n$ og $\pi - \pi/3 + 2\pi n$, for heltall n. Siden $x = v/2$ gir dette løsningene

$$x = \pi/6 + \pi n \quad \text{og} \quad x = \pi/3 + \pi n$$

I det oppgitte intervallet er løsningene

$$\underline{x \in \{\pi/6, \pi/3, 7\pi/6, 4\pi/3\}}$$

h) Løs ulikheten

$$\cos(v) \leq -\frac{1}{2}$$

for $-\pi \leq v < \pi$.

LF: Vi tegner opp en enhetssirkel og observerer at løsningene er vinkler slik at posisjonen på enhetssirkelen ligger til venstre for linjen $x = -1/2$. Løsningen til $\cos(v) = -1/2$ er $v = \pm 2\pi/3$ opp til et helt omløp. Løsningsmengden er

$$\underline{v \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi\rangle}$$

Oppgave 2. a) Hva må parameteren a være for at polynomet

$$p(x) = x^3 - ax + 3$$

skal kunne deles med $x - 1$? Bestem kvotienten i dette tilfellet.

LF: Polynomet $p(x)$ er delelig med $x - 1$ presis når $p(1) = 1 + 3 - a = 0$, siden resten under polynomdivisjonen er $p(a)$. Derfor er $\underline{a = 4}$. Vi utfører polynomdivisjone

$$\begin{array}{l} (\quad x^3 \qquad - 4x + 3) \div (x-1) = x^2 + x - 3 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \qquad\quad x^2 - 4x \\ \qquad \underline{-x^2 \ \ + x} \\ \qquad\qquad -3x + 3 \\ \qquad\qquad\ \ \underline{3x - 3} \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

Kvotienten er $x^2 + x - 3$.

b) Finn verdien til følgende tall (skriv verdien enklest mulig)

$$\frac{2^{201} \cdot 6^{800}}{3^{299} \cdot 12^{500}}$$

LF: Tallene er svært store. Det er problematisk å behandle dem i en kalkulator. Vi forsøker å forkorte for hand.

$$\frac{2^{201} \cdot (2 \cdot 3)^{800}}{3^{299} \cdot (2^2 \cdot 3)^{500}} = \frac{2^{1001} 3^{800}}{2^{1000} 3^{799}} = 2 \cdot 3 = \underline{6}$$

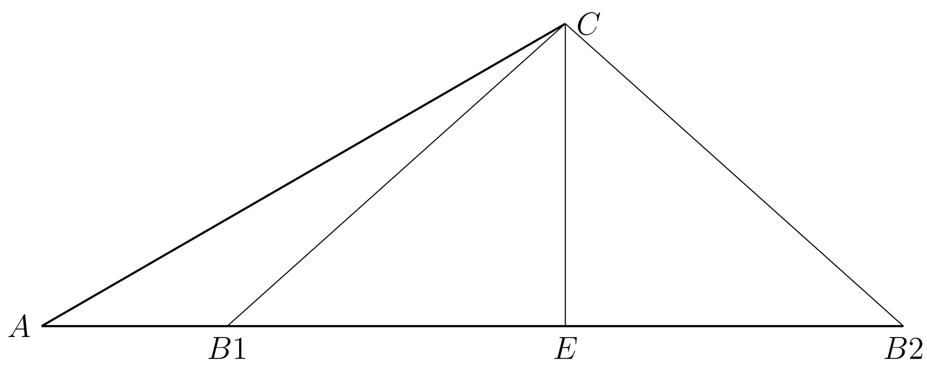
Oppgave 3. a) Bestem lengden til siden AB i alle trekanter ABC hvor vinkel A er lik $30°$ og lengden til side AC er lik 4 og lengden til side BC er lik 3.

LF: Det er to mulige trekanter. Høyden CE er lik AB ganget med sinus til vinkel A. Derfor er lengden til CE lik 2. Tilsvarende har AE lengde $2\sqrt{3}$. Vi får rettvinkla trekanter hvor hypotenus har lengde 3 og katetene er CE og BE. Derfor er lengden til BE lik

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

De to mulige lengdene til siden AB er da

$$\underline{2\sqrt{3} - \sqrt{5} \quad \text{og} \quad 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$



b) Bestem vinklene i trekanten hvor sidene har lengder $3, 4$ og 6. Lag gjerne en skisse og vis hvor de ulike vinklene hører til.

LF La side a ha lengde 3, side b lengde 4 og side c lengde 6. Vi kan benytte cosinussetningen. Vi har

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos(\angle C)$$

Vi løser ut for $\cos(\angle C)$

$$\cos(\angle C) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{36 - 16 - 9}{-2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-11}{24}$$

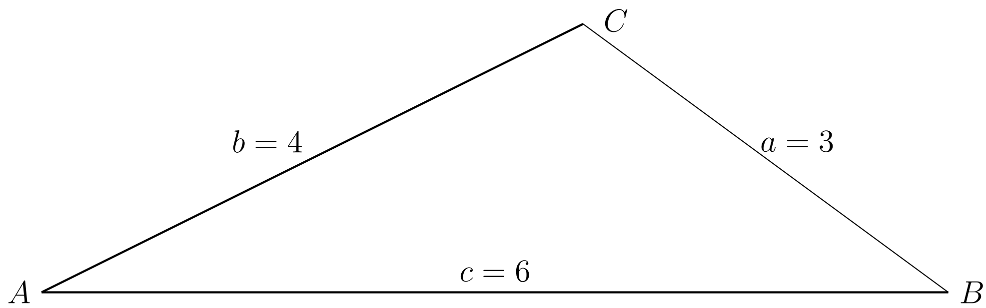
Dette gir $\underline{\angle C = \arccos(-11/24) = 117.28°}$.
Tilsvarende finner vi vinkel $\angle B$ som

$$\angle B = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right) = \arccos\left(\frac{16 - 9 - 36}{-2ac}\right)$$

$$\underline{\angle B = \arccos\left(\frac{29}{2 \cdot 3 \cdot 6}\right) = \arccos(29/36) = 36.336°}$$

Den siste vinkelen kan vi finne som

$$\underline{\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 26.384°}$$



Oppgave 4. a) En aritmetisk rekke har egenskapen at $b_3 = 3$ og $b_5 = 7$. Finn et uttrykk for ledd b_n og bestem summen

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{20}$$

Differansens er lik $d = (b_5 - b_3)/2 = 2$. Leddene er derfor på formen $b_n = 2n + a$. Setter vi inn $n = 3$ får vi $b_3 = 2 \cdot 3 + a = 3$, så $a = -3$ og

$$\underline{b_n = 2n - 3}$$

Summen

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{20} = -1 + 1 + 3 + 5 + \cdots + 37$$

er lik

$$\frac{37 + (-1)}{2} \cdot 20 = \underline{360}$$

b) Hva må k være for at den uendelige geometriske rekken

$$k^2 + k^3 + k^4 + \cdots$$

skal være lik 2?

Summen til den geometriske rekken er lik

$$k^2 \cdot \frac{1}{1-k}$$

hvis $|k| < 1$. Hvis $|k| \geq 1$ divergerer den uendelige rekken. Vi må derfor ha at

$$\frac{k^2}{1-k} = 2 \quad \text{og} \quad |k| < 1$$

Dette gir andregradslikningen $k^2 = 2(1-k)$ eller

$$k^2 + 2k - 2 = (k+1)^2 - 3 = 0$$

hvor vi har fullført kvadratet. Løsningene er

$$k + 1 = \pm\sqrt{3} \quad \text{som gir} \quad k = -1 \pm \sqrt{3}$$

Siden $k = -1 - \sqrt{3} < -1$ vil ikke rekken konvergere for denne verdien, så den er ikke en løsning. Verdien $k = -1+\sqrt{3} \simeq 0.73$ har absoluttverdi mindre enn 1, så dette gir en løsning. Den uendelige rekken er derfor lik 2 presis når $\underline{k = \sqrt{3} - 1.}$

c) Forklar hvorfor det rasjonale uttrykket

$$\frac{x^{80} - 1}{x^2 + 1}$$

er lik et polynom for alle x. Finn dette polynomet.

Vi har følgende uttrykk for summen til en endelig geometriske rekke

$$a_1(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$$

Vi kjenner igjen uttrykket vårt som

$$-\frac{1-k^{40}}{1-k} \quad \text{hvor} \quad k = -x^2$$

Vi konkluderer med at polynomdivisjonen går opp og kvotienten er polynomet gitt ved rekken

$$-(1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \cdots + (-x^2)^{39})$$
$$= \underline{-1 + x^2 - x^4 + x^6 - + \cdots + x^{78}}$$

Ved bruk av summenotasjonen er polynomet lik

$$\sum_{i=0}^{39} (-1)^{i+1} x^{2i}$$

Alternative forsøk: Vi observere at uttrykket vårt er lik $q(x^2)$ hvor $q(y) = (y^{40} - 1)/(y + 1)$. Polynomdivisjonen går opp siden $y = -1$ satt inn i $y^{40} - 1$ er lik 0 (så resten under divisjonen blir lik 0). Dette viser at polynomdivisjonen går opp.

Vi kan og utføre polynomdivisjonen direkte. Det blir mange steg, men det er mulig å kjenne igjen et mønster som leder til kvotienten ovenfor.

Oppgave 5. a) Finn to 3-vektorer (i rommet) med lengde 1 som er ortogonale og slik at alle koordinatelementene i begge vektorene er ulik null.

LF: To vektorer med alle elementer ulik null og med skalarprodukt lik null kan for eksempel være [1,1,1] samt en vektor hvor summen av elementene er lik 0, slik som $[1,1,-2]$. Normaliserer vi disse to vektorene får vi enhetsvektorer med skalarprodukt lik 0. Lengdene til vektorene er henholdsvis $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ og $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Et eksempel på to ortogonale vektorer av lengde 1 med alle elementer ulik 0 er derfor

$$\underline{(1/\sqrt{3})[1,1,1] \quad \text{og} \quad (1/\sqrt{6})[1,1,-2]}$$

b) De to vektorene $\overrightarrow{a} = [-1,3]$ og $\overrightarrow{b} = [4,3]$ er ikke parallelle. Derfor er alle vektorer i planet en lineær kombinasjon av $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$. Finn skalarene s og t slik at

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = [2,-1]$$

LF: Vi setter inn koordinatene til vektorene

$$s[-1,3] + t[4,3] = [2,-1]$$

Dette er et lineært likningssystem med to likninger og to ukjente variabler s og t

$$\begin{aligned} -s + 4t &= 2 \qquad (1) \\ 3s + 3t &= -1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Vi løser dette likningssystemet. Ta tre kopier av den første likningen og legg til den andre likningen. Da vil ledd som involverer s kanselere ut og vi får

$$12t + 3t = 6 - 1$$

Dette gir $t = 5/15 = 1/3$. Vi kan nå benytte den første likningen til å finne s

$$s = 4t - 2 = 4/3 - 2 = -2/3$$

Verdiene til parametrene er derfor $\underline{s = -2/3 \text{ og } t = 1/3}$. Lineærkombinasjonen er

$$-2/3[-1,3] + 1/3[4,3] = [2,-1]$$

Oppgave 6. a) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når $\vec{u} = [2,3,-4]$ og $\vec{u} + \vec{v} = [1,1,1]$.

LF: Vi finner

$$\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = [1,1,1] - [2,3,-4] = [-1,-2,5]$$

Skalarproduktet

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = [2,3,-4] \bullet [-1,-2,5] = -2 - 6 - 20 = -28$$

Lengdene til vektorene er

$$|\vec{u}| = |[2,3,-4]| = \sqrt{29} \quad \text{og} \quad |\vec{v}| = |[-1,-2,5]| = \sqrt{30}$$

Vinkelen w mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\cos(w) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-28}{\sqrt{29}\sqrt{30}} \simeq -0.94929$$

Vinkelen er derfor

$$\underline{w = \arccos(-0.94929) \simeq 161.67^\circ}$$

b) Parametriser linjen som er snittet (felles punkt) til de to plana gitt ved

$$x - 4z = 12 \qquad \text{og} \qquad x + y - z = 3$$

LF: Et felles punkt i de to plana er $(0,0,-3)$ siden punktet oppfyller begge likningene. Normalvektorer til plana er $[1,0,-4]$ og $[1,1,-1]$. En retningsvektor til linjen er en vektor som står normalt til begge normalvektorene til plana. Kryssproduktet til normalvektorene er en slik vektor. Vi regner den ut

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] = [4,-3,1]$$

En parametrisering er derfor gitt ved

$$\underline{[x,y,z] = [0,0,-3] + t[4,-3,1]}$$

for $t \in \mathbb{R}$.

c) Finn korteste avstand mellom punktet $P(1,1,-1)$ og linjen som går gjennom origo og har retningsvektor $\vec{r} = [2,-2,1]$.

LF: Vi velger origo på linjen. Vektoren fra origo til P er $\overrightarrow{OP} = [1,1,-1]$. Vi finner komponenten til denne vektoren som er langs linjen.

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{OP} \bullet \vec{r}}{|\vec{r}|^2}\vec{r} = \frac{[1,1,-1] \bullet [2,-2,1]}{9}[2,-2,1] = \frac{-1}{9}[2,-2,1]$$

Komponenten tli $\overrightarrow{OP}$ vinkelrett på linjen er

$$\overrightarrow{OP} - \vec{a} = \frac{1}{9}([9,9,-9] + [2,-2,1]) = \frac{1}{9}[11,7,-8]$$

Lengden til denne vektoren er lik

$$\left|\frac{1}{9}[11,7,-8]\right| = \frac{\sqrt{121+49+64}}{9} = \frac{\sqrt{234}}{9} = \frac{\sqrt{9 \cdot 26}}{9} = \underline{\frac{\sqrt{26}}{3} \simeq 1.69967}$$

er den korteste avstanden mellom punktet P og linjen.