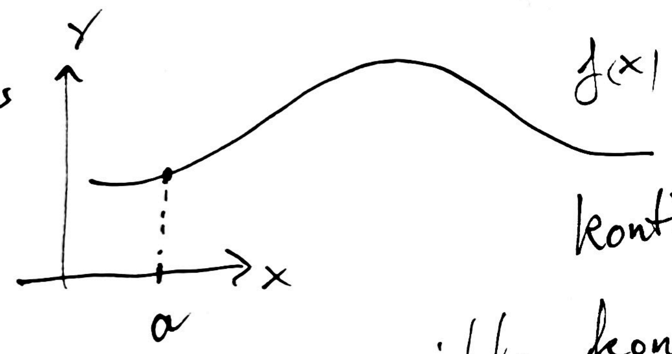
4 jan. 2021

Kap 6 Grenser og kontinuitet.

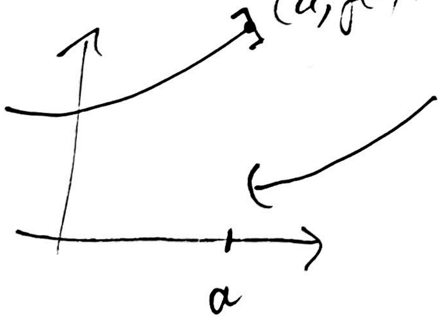
En funksjon $f(x)$ er KONTINUERLIG i $x = a$ hvis $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a.

Eks



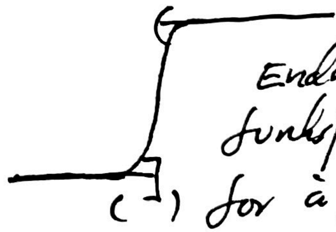
kontinuerlig funksjon.

ikke kontinuerlig : diskontinuerlig.



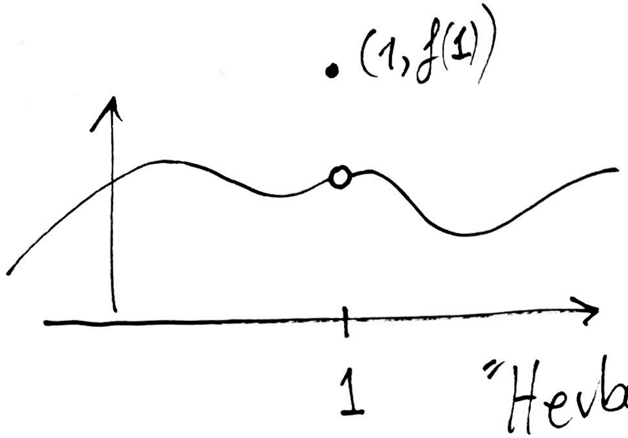
diskontinuerlig i $x = a$

"Hopp diskontinuitet"

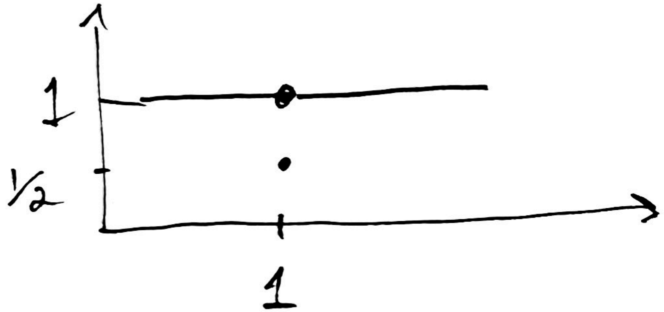


Endret funksjonen ( ) for å gjøre den kontinuerlig.

$$\frac{x-1}{x-1} = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ \text{ikke def} & x = \end{cases}$$



"Hevbar diskontinuitet."



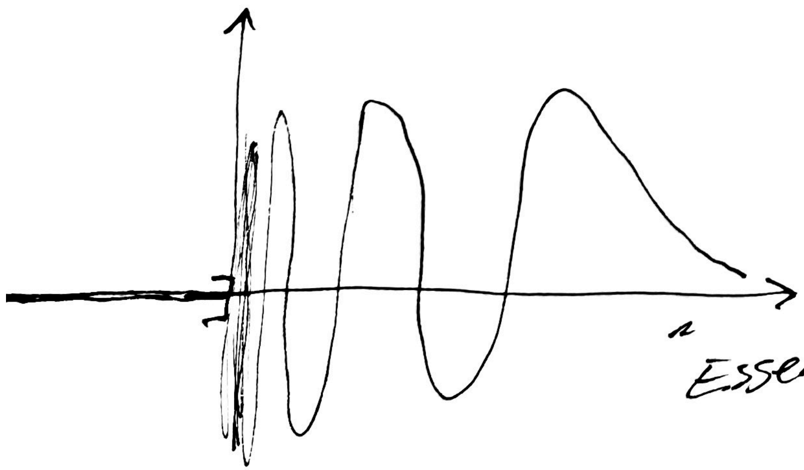
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

Gjøres kont. i $x=1$ ved å flytte verdien $f(1)=\frac{1}{2}$ til $f(1)=1$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$f(0)=0$.

$f(x)$ tar alle verdier mellom -1 og 1 vilkårlig nært 0 fra positiv side $(x>0)$

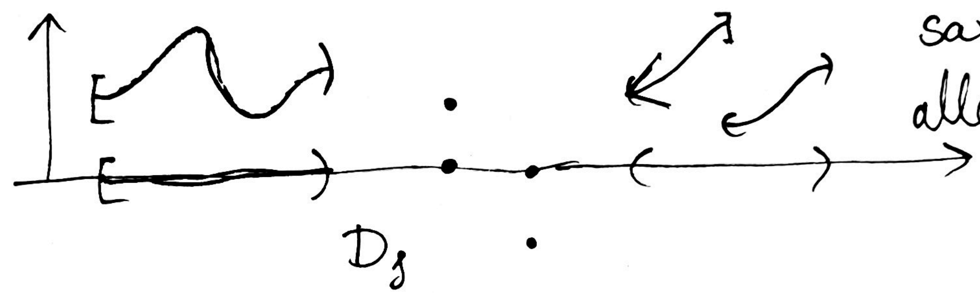


"Essensiell diskontinuitet"

Funksjoner: f, D_f

f ↑ funksjon, D_f ↑ def. mengde

For alle $x \in D_f$ så har vi en funksjonsverdi $f(x)$



Grafen til f samlingen av alle punkt $(x, f(x))$ $x \in D_f$.

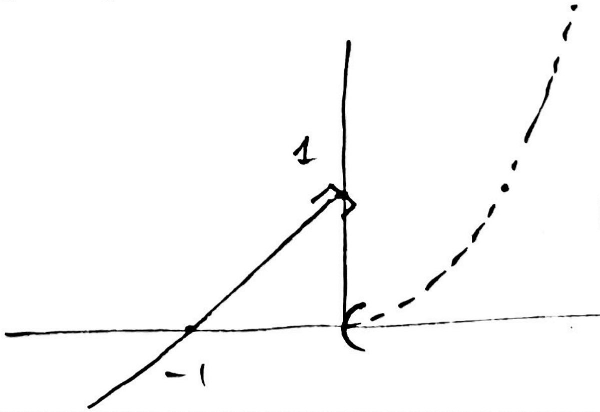
Funksjoner er ofte gitt av et uttrykk (formel)

$$f(x) = 2x - x^3$$

(D_f ikke er oppgitt: da menes ofte den naturlige def.-mengden.)

Delt forskrift. Ulike uttrykk på forskjellige deler av def. mengden

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$



$$\left(\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \quad \text{Hopp-diskont.} \right)$$

Grenser (6.1)

(limit (eng) = grense)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

"grensen når x nærmer seg a av $f(x)$ er lik L".

$f(x)$ kan gjøres vilkårlig nær L ved å avgrense intervallet til x rundt. $x=a$.

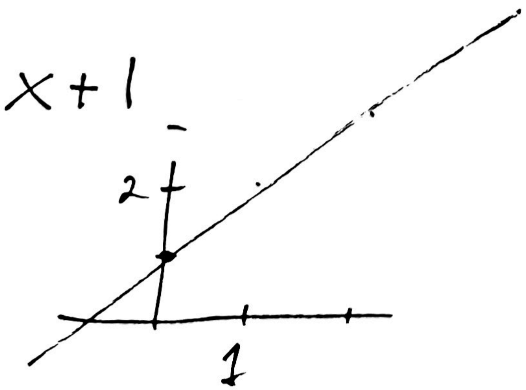
(vi bruker ikke verdien til f i $x=a$, f behøver ikke engang være def. i $x=a$)

$f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$ $x \neq 1$

nat. def. mengde $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$g(x) = x+1$



$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad x \neq 1 \qquad \lim_{x\to 1} h(x)$$

$$h(1{,}1) = \frac{(1.1)^2-1}{1.1-1} = \frac{1.21-1}{0.1} = 2{,}1$$

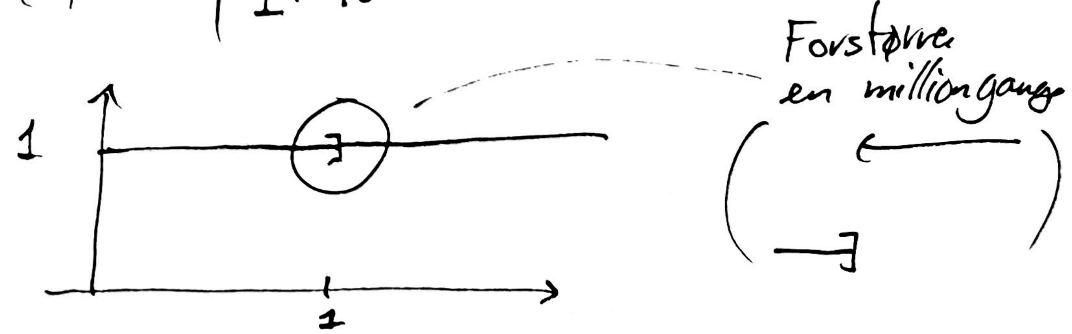
$$h(0.9) = \frac{(0.9)^2-1}{0.9-1} = \frac{0.81-1}{-0.1} = \frac{-0.19}{-0.1} = +1{,}9$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1 \qquad (x \neq 1)$$

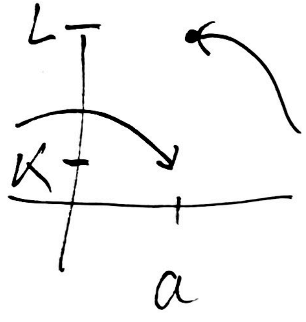
$$\text{Så } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = \underline{2}$$

Eksempel på en graf som ser kont. ut, uten å være det

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 1+10^{-6} & x > 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ grensen fra høyre når x går mot a (positiv side) av $f(x)$ er lik L



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = K$ tilsvarende

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ eksisterer $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

$p(x)$ polynom. $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ (polynomer er kont.)

Hva er $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 2x + 4}{x + 2}$? "type $\frac{0}{0}$"

ved pol.div $= \lim\limits_{x \to -2} x^2 - 2x + 2 = (-2)^2 - 2(-2) + 2$
$= 4 + 4 + 2 = \underline{\underline{10}}$

Utfører pol. divisjon.

$$x^3 \quad -2x + 4 : x+2 = x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 + 2x^2} \\
\quad -2x^2 - 2x + 4 \\
\quad \underline{-2x^2 - 4x} \\
\qquad\quad 2x + 4 \\
\qquad\quad \underline{2x + 4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

~~lim~~ oppg. $R(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

Hva er $\lim\limits_{x \to 2} R(x)$ og hva $\lim\limits_{x \to 1} R(x)$?

$$\lim_{x \to 2} R(x) = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2-1)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2x-3)} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \underline{0.6}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}.$$

$$\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x\to 1} x+1}{\lim_{x\to 1} x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^2}$$ "type $\frac{0}{0}$".

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-2}$ eksisterer ikkje.

$x = 2 \pm \frac{1}{1000}$: $\frac{4 \pm \frac{1}{1000}}{\pm 1/1000} = \begin{cases} 4001. & + \\ -3999 & - \end{cases}$ tilfelle

Grensesetningene

$f(x)$, $g(x)$ funksjoner $\quad \lim_{x\to a} f(x) = K$

$\lim_{x\to a} g(x) = L$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right) = K+L$$

$$\lim_{x\to a} \left(k\cdot f(x)\right) = k \cdot K$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L} \quad \text{når } \lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \cancel{\lim} \; K\cdot L$$

Eks. $\lim_{x\to a} \left(2f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(2f(x)\right) + \lim_{x\to a} \left(g(x)\right)$

$$= 2\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \underline{2K+L}$$

oppgave Finn grensen (hvis mulig) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

$$x^3+1 : x+1 = x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{l} x^3+x^2 \\ \hline -x^2+1 \\ -x^2-x \\ \hline x+1 \\ \underline{x+1} \\ 0 \end{array}$$

og $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-x+1}{x+2}$$

(type $\frac{0}{0}$)

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} x^2-x+1}{\lim\limits_{x \to -1} x+2} = \underline{\underline{3}}$$

2. oppgave

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x > 2 \\ x+3 & x \le 2 \end{cases}$$

Finn $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ (hvis de eksisterer)

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} x+2 = \underline{4}$$

$$\lim_{x \to 2^-} (x+3) = 2+3 = \underline{5}$$

($\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ eksisterer ikke)

Gitt $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$ og $\lim_{x\to 3} g(x) = \cancel{3}5$

Hva er $\lim_{x\to 3} \dfrac{2f(x) + g(x)}{f(x)^2 + 3g(x)}$?

$$\lim_{x\to 3} \left(2f(x) + g(x)\right) = 2(-2) + 5 = 1$$

$$\lim_{x\to 3} \left(f(x)^2 + 3g(x)\right) = \lim_{x\to 3} f(x)^2 + \lim_{x\to 3} 3g(x)$$

$$= \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)^2 + 3\lim_{x\to 3} g(x)$$

$$= (-2)^2 + 3\cdot 5$$

$$= 4 + 15 = 19 \quad (\neq 0)$$

Så $\lim_{x\to 3} \dfrac{2f(x)+g(x)}{f(x)^2+3g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to 3} 2f(x)+g(x)}{\lim_{x\to 3} f(x)^2+3g(x)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{19}}}$

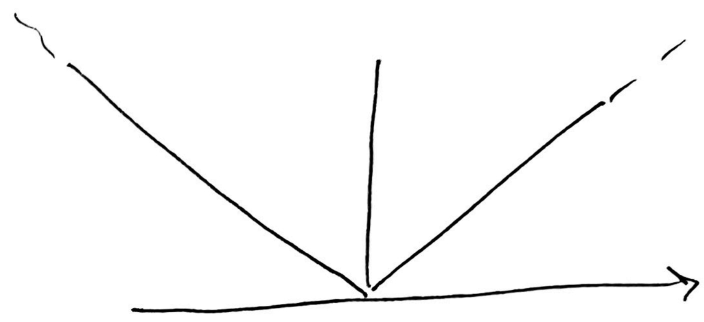
Hva er $\lim\limits_{x\to 0} |x|$?

Den er 0.

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = -0 = 0$$

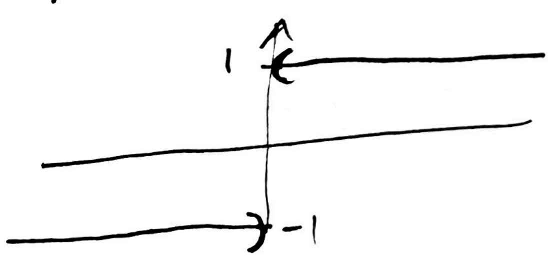
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$



Hva er $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?

Hva med $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ og $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$?

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Så $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ eksisterer ikkje.

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-10)^9 = \left(\lim_{x\to 2} 3x^2-10\right)^9 = (3\cdot 2^2-10)^9 = 2^9 = \underline{512}$$

Gitt $\lim_{x\to a} f(x) = 2$

Hva er $\lim_{x\to a} \frac{f(x)^2-4}{f(x)-2}$?

Hvis $f(x)=2$ for alle x: $f(x)^2-4=0$ for alle x

$f(x)-2=0$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)^2-4}{f(x)-2}$ har ingen grense ...

Anta $f(x)\neq 2$ for $x\neq a$ men nær a: $f(x)-2\neq 0$ for $x\neq a$ nært a.

$$\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)-4}{f(x)-2} = \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+2)(f(x)-2)}{(f(x)-2)} = \lim_{x\to a}(f(x)+2) = \underline{\underline{4}}$$

Grense fra geogebra demonstrasjon.:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \qquad \left(\text{type } \frac{0}{0}\right)$$

"triks"

$$\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 1 + x - 1 = x$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{x \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}$$

Så $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$