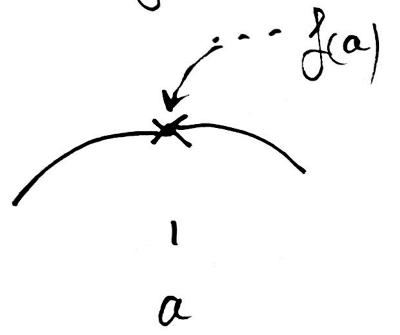
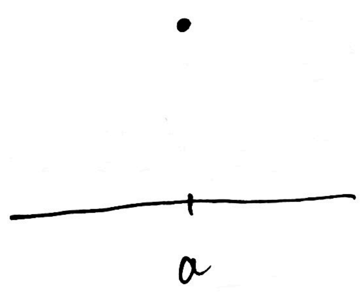
5.01.2021

# 6.2 Kontinuerlige funksjoner.

$f$ definert i $x = a$.

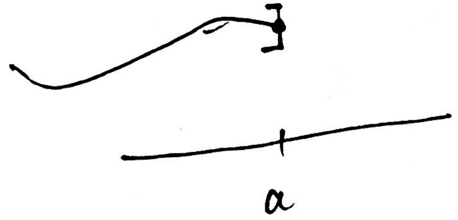
$f$ er kontinuerlig i $x = a$ hvis $\underline{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$




$f$ bare definert i $x = a$.

Denne funksjonen er kont. i $x = a$.




$f$ def for $x \leq a$.

$\left( \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right.$ tom

$f$ kont $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f$

i dette tilfellet.

$f$ er <u>kontinuerlig</u> hvis $f$ er kont. for alle punkt i $D_f$

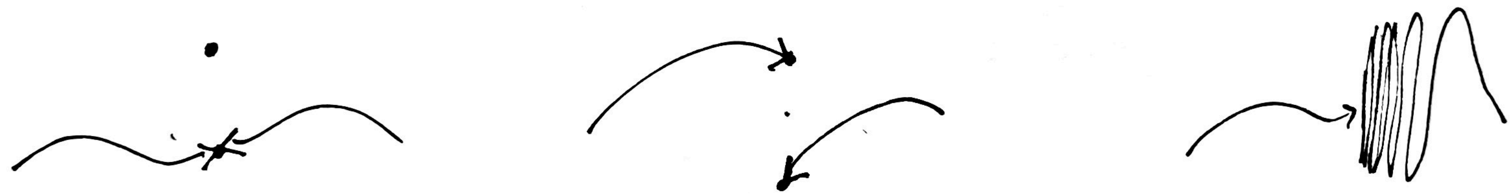
Alle polynomer er kontinuerlige.

$\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ for alle polynomer.

* $f(x)$ har hevbar diskontinuitet i $x=a$ hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer men $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

* $f(x)$ har hopp-diskontinuitet i $x=a$ hvis $\lim_{x\to a^-} f(x) = K$ og $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ eksistere, men er ulike $K \neq L$.

* Ellers: Essensiell diskontinuitet



$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

(tilsvarer 6.23)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 - 3 = 2^3 - 3 = 8 - 3 = \underline{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}$$

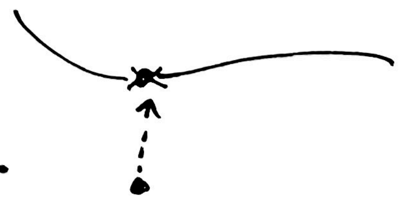
$$= \lim_{x\to 2^+} x+3 = 2+3 = \underline{5}$$

så $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 \neq f(2) = 2$. så $f(x)$ er diskontinuerlig i $x = 2$.

Endrer vi $f(x)$ slik at ~~f~~ funksjonen blir $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & 2 > x \\ 5, & 2 = x \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & 2 < x \end{cases}$

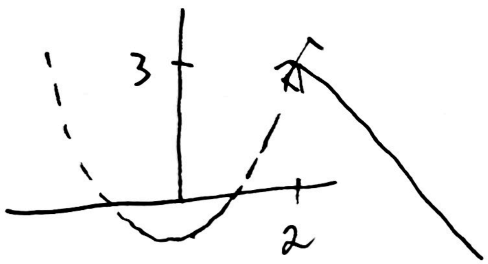
da blir $g(x)$ kont. i $\underline{x=2}$.

Eksempel på hevbar diskont.



$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ 5 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

Er $h(x)$ kontinuerlig?



$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} 5 - x = 5 - 2 = 3$$

$$h(2) = 5 - 2 = 3$$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = 3 = h(2)$$

Så $h(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

Er $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$ kontinuerlig?

For $a \neq -2$ er $f(x)$ kont siden den da er lik et rasjonalt uttrykk nær a.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} x-2 = -4$$
$$= f(-2) \checkmark$$

$f(x)$ er kont. i $a = -2$.

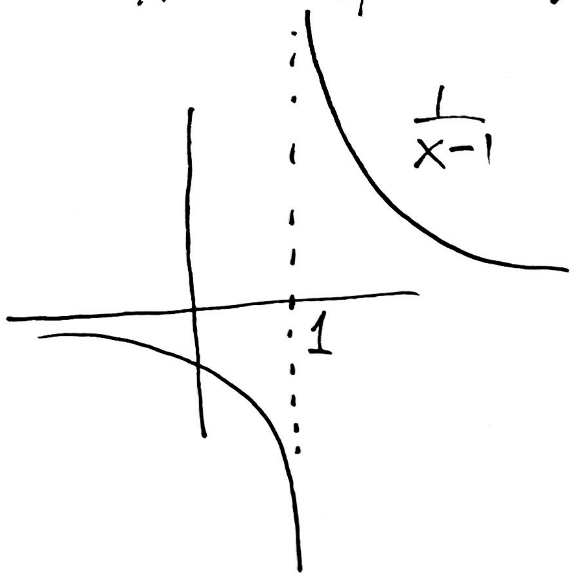
Oppg Bestem b slik at

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x+1} & x \neq -1 \\ b & x = -1 \end{cases}$$ blir kont.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+5x+4}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1} (x+4)$$

$= -1+4 = \underline{3}$ Så $g(x)$ er kontinuerlig <u>hvis $b=3$</u>

Alle rasjonale funksjoner er kontinuerlige.
(husk de er bare def. der hvor nevneren er ulik 0)




$\frac{1}{x-1}$ er kont. på $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

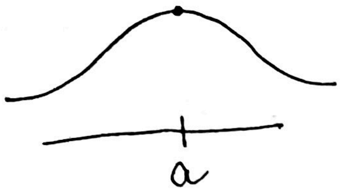
$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ er ikke kont. i $x = 1$.

$\lim_{x\to 4} 3x-1 = 3\cdot 4-1 = 11$ siden $3x-1$ er et pol. ~~som~~ og da kont.

$\lim_{x\to -1} x^3+5x = (-1)^3+5(-1) = \underline{-6}$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+5x}{x^2-4} = \frac{(-1)^3+5(-1)}{(-1)^2-4} = \frac{-6}{-3} = \underline{2}$

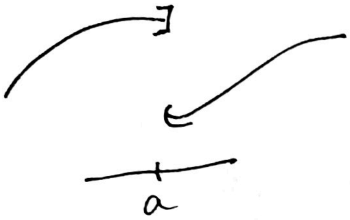
Kontinuitet & grenser



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\begin{cases} -x^3/6 & x \le 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

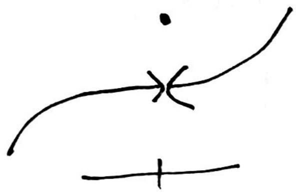
diskontinuerlig i $x = a$



$\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eksisterer men er ulike

Hopp-diskontinuitet

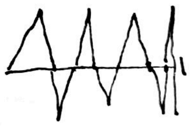
$$\begin{cases} x^3+1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



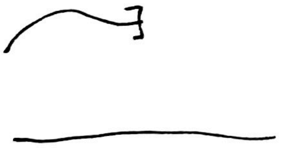
Hevbar diskontinuitet

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

Ellers: Essensiell diskont.



halve avstande



($\lim_{x \to a^+} f(x)$ tom)

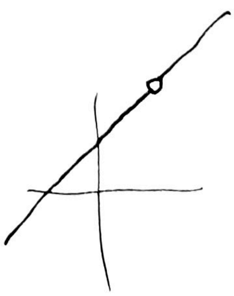
$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, kont.

$\lim_{x \to a} f(x)$ tom, kont

Pol, rasj.-funksjoner er kont

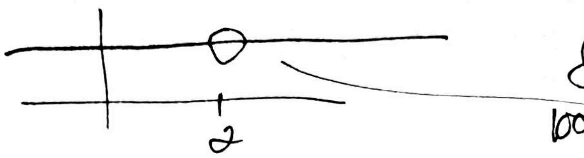
deriverbar $\Rightarrow$ kont.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \\ b & x=1 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ b & x \neq 1 \end{cases}$$



on an interval
"tegne grafen uten å løfte penna"

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 2 \\ 1 + \frac{1}{1000} & x > 2 \end{cases}.$$



forstørre 1000ganger

Grenser $\lim_{x \to a} f(x) = L$

a-δ a+δ

a

ε-δ-definisjonen av grense.

For alle $\epsilon > 0$ så finnes det a $\delta > 0$

$|f(x) - L| < \epsilon$ for alle $x$ slik at $0 < |x-a| < \delta$.

$\frac{\sin x}{x}$ $\frac{2^x - 1}{x}$