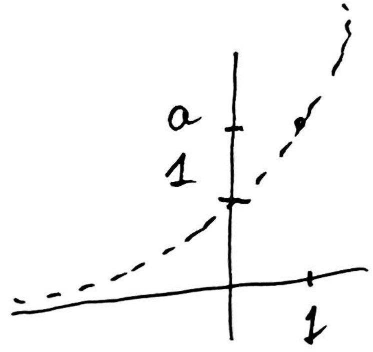
8 feb. 2021

Eksponentfunksjon a^x $\quad a > 0$, $a \neq 1$



$a > 1$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

$$(a^x)' = (\text{konstant}) \cdot a^x$$

↑ lik 1

$$(e^x)' = e^x.$$

$$a = e^{\log_e a} = e^{\ln a}.$$

$a = e \sim 2.718281828\ldots$

Euler tallet

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = a^x \cdot (\ln a \cdot x)'$$

$$a^x = \underline{\ln a \cdot a^x}$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$$

$$\lg x = \log x = \log_{10} x$$

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$(e^{\ln x})' = (x)'$

$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$ $\quad x > 0$

$x \cdot (\ln x)' = 1$ $\qquad (\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \cdot (\ln a)}$

Kurvedrøfting.

$f(x) = e^x - 3x + 1$

$f'(x) = e^x - 3$

$f'(x) \quad - - - - 0$ ———— (at $\ln 3$)

$f''(x) = e^x \geq 1$

$f(0) = e^0 + 0 + 1 = 2$

$\underline{x \geq 0}$

$f'(x) = 0 \quad : e^x = 3$

$\ln e^x = \ln 3$

$(x \underbrace{\ln e}_{1} = \ln 3)$

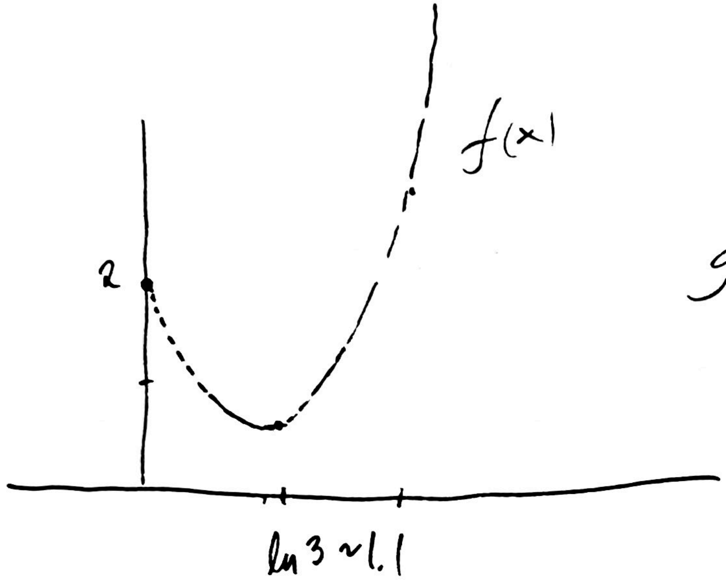
$x = \ln 3.$

$\sim 1.0986..$

$\sim \underline{1.1}$

$f(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3\ln 3 + 1 = 3 - 3\ln 3 + 1$

$\sim 0.7.$



lokalt ~~max~~ toppunkt $(0, 2)$

globalt ~~min~~ bunnpunkt $(\ln 3,\ 3(1-\ln 3)+1)$

$f(x)$ konkav opp i D_f

spørsmål

$$\ln(x^2)$$
$$= \ln(x \cdot x)$$
$$= 2\ln x$$

$$\ln x^2 = 2$$
$$2\ln x = 2$$
$$\ln x = 1$$
$$x = e^1 = e$$

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x)$$
$$(\ln x)^2 = 2$$
$$(\ln x) = \pm\sqrt{2}$$
$$\underline{x = e^{-\sqrt{2}}}$$
og $\underline{x = e^{\sqrt{2}}}$.

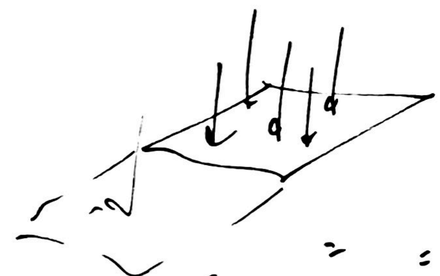
Logaritmisk skala

$\log \frac{P_2}{P_1}$ Bel $= 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ desibel

desibel $= \frac{1}{10}$ Bel

$\log P_2 - \log P_1 = \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$

$\log P_2 = \log\left(P_2/P_1\right) + \log P_1$



$\left(N \quad \text{my} \quad 10^{-6}\right)$

Lydtrykk $\quad \frac{\text{kraft}}{\text{areal}} \; \underbrace{\left(\frac{N}{m^2}\right)}_{\text{kalles Pascal Pa.}}$ enhet

Minste hørbart lydtrykk $P_0 \sim 20 \mu Pa$

$= 20 \cdot 10^{-6}$ Pa.

Referanse lydtrykk.

$10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$

Lydstyrke (energien) $\underset{\sim}{\text{proporsjonal}}$ P^2.

Lydstyrke: $10 \log \frac{P^2}{P_0^2}$ desibel $= 10 \log \left(\frac{P}{P_0}\right)^2$ desibel

$= 20 \log \left(\frac{P}{P_0}\right)$ desibel.

Log 2 = 0.30103
~ 0.30

Doble lydtrykket gir økning $20 \cdot \log(2)$
~ 6 dB.

"Dobbelt så høyt": økning på 6 dB.

økning på 20 dB : 10 ganger så sterk lyd.

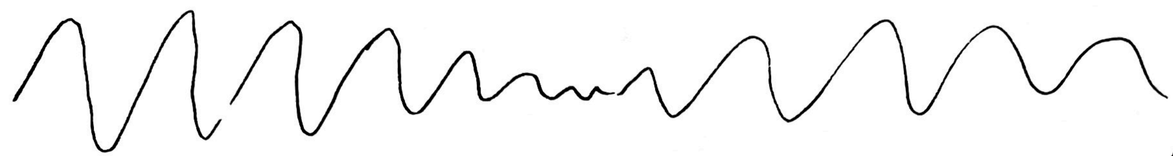
0 dB ($P_0 \sim 20 \mu Pa$) grensen for ~~hørbart~~ hørbar lyd.

120 dB svært høy lyd.

$120 \text{ dB} = 20 \log \left(\frac{P}{P_0}\right)$ dB

$6 = {}_{10}\log (P/P_0)$ så $\frac{P}{P_0} = 10^6$

10



To toner er mest harmoniske når forholdet mellom frekvensene f er en brøk med liten nevner.

$\frac{f_1}{f_2} = 2$	1 oktav	C – C (en oktav høyere)
$\frac{3}{2} = 1.5$	Kvint	C – G
	↕	
$\frac{4}{3} = 1.33\ldots$	Kvart	C – F
$\frac{5}{4} = 1.25$	ters	C – E
$\frac{6}{5} = 1.2$	liten ters	

Kromatisk tonesystem: forholdet til f mellom etterfølgende halvtoner skal være konstant.

Deler en oktav i n halvtoner

forholdet til frekvensen mellom etterfølgende halvtoner må da være $\sqrt[n]{2}$.

Ønsker å gjenskape en kvint:

$$\left(\sqrt[n]{2}\right)^m = 2^{m/n} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{m}{n} = \log_2 2^{m/n} = \log_2(3/2)$$

Undersøke hvilke naturlige tall n gir

$$m = n \cdot \log_2(3/2)$$ mest mulig nær et heltall.

$$= n \cdot \frac{\ln(3/2)}{\ln(2)}$$

$$2^{7/12} = 1.4983\ldots$$

$n = 12$: $\quad 12 \cdot \log_2(3/2) \sim 7.0195\ldots$

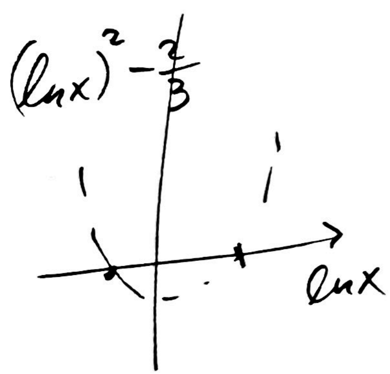
Lager liste over $\left(2^{1/n}, 2^{2/n}, 2^{3/n}, \ldots, 2^{n/n} = 2\right)$

Funksjons-drøfting.

$$g(x) = (\ln x)^3 - 2\ln x = U^3 - 2U$$
$$(\text{hvor } U(x) = \ln x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$



$$g'(x) = (3U^2 - 2) \cdot U'(x) = \left(3(\ln x)^2 - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{-1}\left(3(\ln x)^2 - 2\right) = \frac{3}{\cancel{x}}\left((\ln x)^2 - \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{3}{x}\left(\ln x - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\left(\ln x + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$$

$g'(x) > 0$ for $\ln x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$

og for $\ln x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\ln x$ er en økende funksjon, så

$g'(x) > 0$ $\quad 0 < x < e^{-\sqrt{2/3}}$

og når $x > e^{\sqrt{2/3}}$.

$g'(x) < 0$ for $e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}} < x < e^{\sqrt{2/3}}$

$g'(x) = 0$ for $x_1 = e^{-\sqrt{2/3}} \sim 0.442$ og $x_2 = e^{\sqrt{2/3}} \sim 2.26$

$g(x_1) \sim 1.08$ $\qquad$ $g(x_2) \sim -1.08$

Nullpunkt: $g(x) = 0$

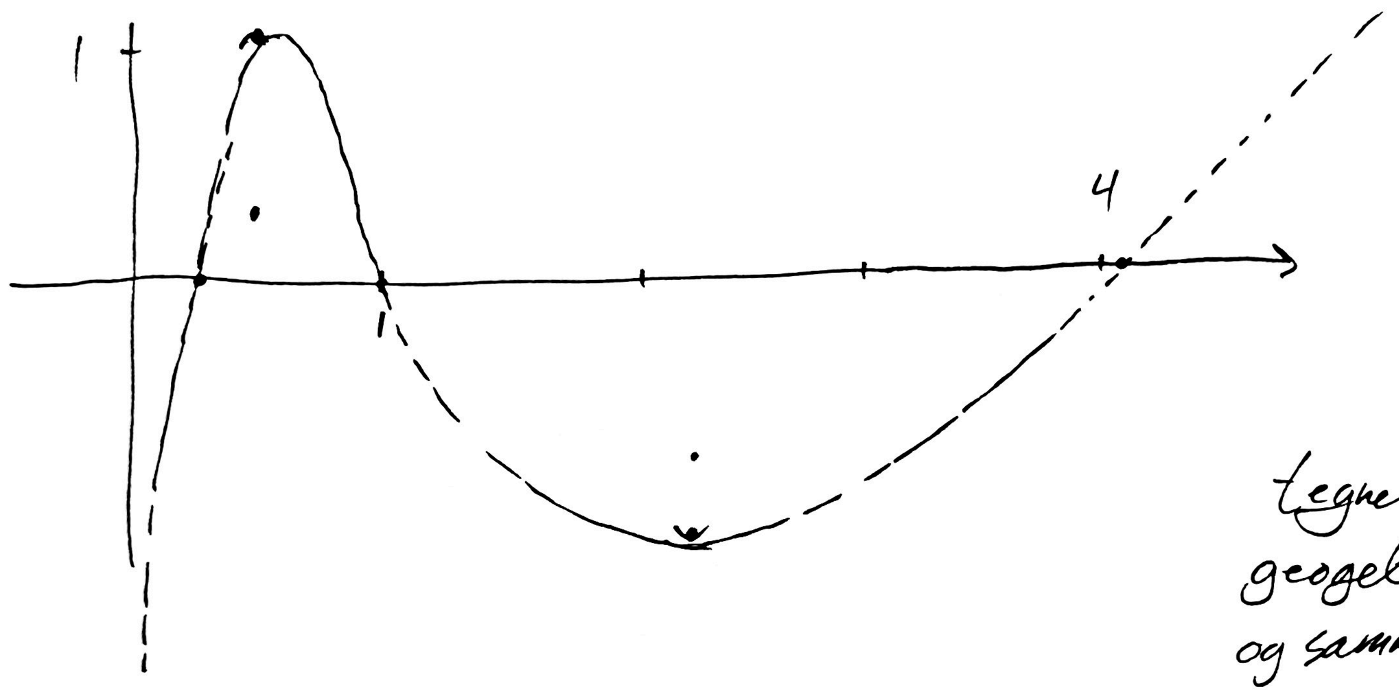
$$= (\ln x)^3 - 2 \ln x$$
$$= \ln x \left((\ln(x))^2 - 2 \right)$$

$\ln x = 0$: $x = 1$

$\ln x = \pm\sqrt{2}$

$x = e^{-\sqrt{2}} \sim 0.243$ $\qquad$ $x = e^{\sqrt{2}}$

$x = 4.11$



tegnet i
geogebra
og sammenlignet
med grafen vår.