1 mars 2021

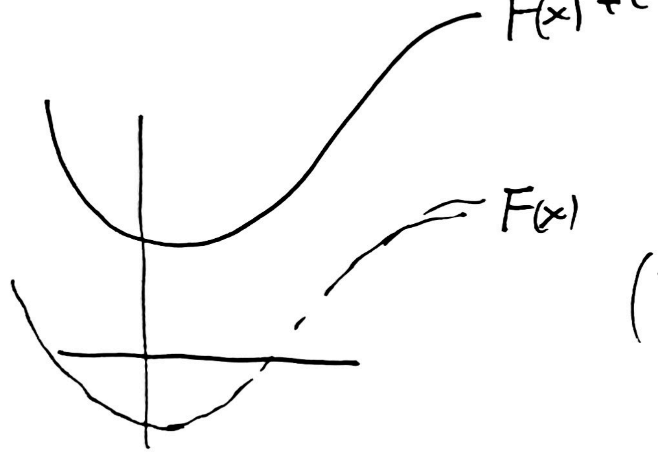
En antiderivert til $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

$f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3$ er en antiderivert

$F(x) = x^3 + 4$ en annen antiderivert

$F'(x) = (x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2 = f(x)$ ✓

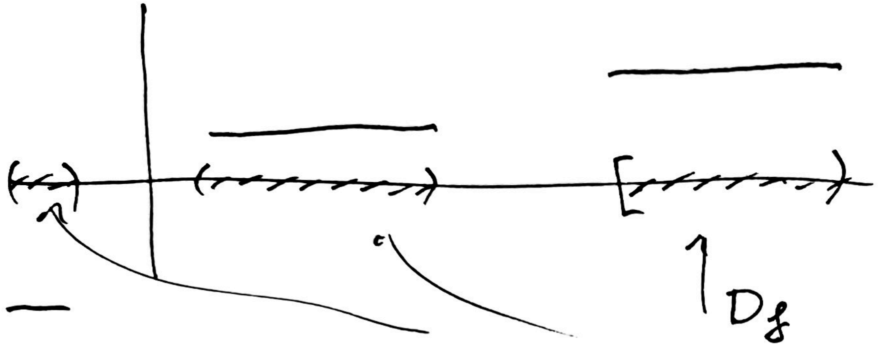


$(F(x)+c)' = F'(x) + \underbrace{(c)'}_{0} = F'(x)$

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er antideriverte til $f(x)$

$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ (for alle x i definisjonsmengden)

$\Rightarrow F(x) - G(x)$ må være konst. på hver komponent av def-mengden



$f'(x) = 0$ for alle $x \in D_f$

$f(x)$ være konstant på hver komponent av D_f.

Alle antiderivert til $f(x) = 3x^2$ er på formen

$F(x) = x^3 + c$, for en konstant c.

oppg. Finn alle antiderivert til 1) $\sin x$: Antiderivert $-\cos(x) + c$

(husk at $(\cos x)' = -\sin x$)

2) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

3) $|x|$

2) $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

så $\left(\frac{-1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

De antiderivert**e** er $\begin{cases} \frac{-1}{x} + C_1 & x > 0 \\ \frac{-1}{x} + C_2 & x < 0 \end{cases}$

vanligvis skriver vi bare $\underline{\frac{-1}{x} + C}$ (underforstått at C kan ha forskjellige verdier på ulike komponenter av definisjonsmengden.)

3) $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$ og $\left(\frac{-x^2}{2}\right)' = -x$

De ~~En~~ antiderivert**e** til $|x|$ er $\begin{cases} \frac{-x^2}{2} & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & x \geq 0 \end{cases} + C$

(denne er derivbar i $x=0$)

Det ubestemte integralet til $f(x)$ er samlingen av alle antideriverte til $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Det ubestemte "integralet av $f(x)$ med hensyn til x"

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

oppg.

$$\int 3 + 2x\,dx = \underline{3x + x^2 + C}$$

$$\int 3x^5\,dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + C = \underline{\frac{x^6}{2} + C}$$

$(x^r)' = r x^{r-1}$ r reelt tall

Anta $r \neq 0$, deler med r:

$$\left(\frac{x^r}{r}\right)' = x^{r-1}$$

La $r-1 = s$

$r = s+1$

$$\left(\frac{x^{s+1}}{s+1}\right)' = x^s \qquad s \neq -1.$$

Så $\frac{x^{s+1}}{s+1}$ er en antiderivert til x^s, $s \neq -1$.

= legg 1 til eksponenten, og del på den = nye eksponenten

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

$$\int x^s\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + C & s \neq -1 \\ \ln|x| + C & s = -1 \end{cases}$$

C reelt tall.

$$\int x^7\,dx = \frac{x^{7+1}}{8} + C = \underline{\frac{x^8}{8} + C}$$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= \underline{\frac{-1}{2\cdot x^2} + C}$$

$$\int x^{7.61}\,dx = \underline{\frac{x^{8.61}}{8.61} + C}.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \underline{\ln|x| + C}$$

(dette vil si alle funksjoner $\ln|x| + 3$, $\ln|x| - 19$, $\ln|x|$, $\ln|x| + 25.7\ldots$)

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \underline{\frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + c}$$

$$\int 4x^{17}\, dx = 4 \cdot \frac{x^{18}}{18} + c = \underline{\frac{2x^{18}}{9} + c}$$

$$\int -2/x^2\, dx = \int -2 \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \int -2x^{-2}\, dx = \underline{\frac{2}{x} + c}$$

$$\int x^{\pi}\, dx = \underline{\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + c}$$

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot F(x) + c$$

$$(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

$k\,F(x)$ er en antiderivert til $k \cdot f(x)$.

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \qquad \left(\text{men } \int 0 f(x)\, dx = 0 \cdot \int f(x)\, dx + c \right)$$

$F'(x) = f(x)$ og $G'(x) = g(x)$

$\Rightarrow \left(F(x) + G(x)\right)' = f(x) + g(x)$

Derfor er $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Ubestemte integral er lineære.

$$\int \sqrt{x}(2x+3)\,dx = \int 2x\sqrt{x}\,dx + \int 3\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\int x^{3/2}\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx = 2\,\frac{x^{5/2}}{5/2} + C_1 + 3\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + C_2$$

$$= \frac{4x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C}$$

$$= \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C$$

$$\left(2 \cdot \frac{1}{5/2} \overset{\text{utvider med 2}}{=} 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\right)$$

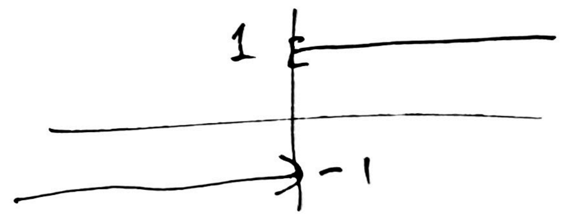
oppg. Bruk linearitet

$$\int 2x^3 - \frac{4}{x} + 3\cos x \, dx$$

$$= 2\int x^3 dx - 4\int \frac{1}{x} dx + 3\int \cos x \, dx$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{x^4}{4}\right) - 4\left(\ln|x|\right) + 3(\sin x) + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x^4 - 4\ln|x| + 3\sin(x) + C}$$



Funksjonen $f(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$f(x)$ har ikke en antiderivert!

$$(|x|)' = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

men ikkje deriverbar i $x = 0$.

Alle <u>kontinuerlige</u> funksjoner har en antiderivert.

$$\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Så $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$

hvor $u(x) = x^2+1$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$
$$= \underline{\ln|x^2+1| + C}$$

$u(x) = x^3+4$

$u'(x) = 3x^2$

så $x^2 = \frac{1}{3} \cdot u'(x)$

oppg.

$$\int \frac{x^2}{x^3+4}\,dx$$

$$\int \frac{(\frac{1}{3})\,u'(x)}{u(x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \frac{1}{3}\ln|u(x)| + C$$
$$= \underline{\frac{1}{3}\ln|x^3+4| + C}$$

$\int 2 \cdot s^{5.5}\, ds$ variabelen er s

$2 \dfrac{s^{6.5}}{6,5} + c = \underline{\dfrac{4 s^{6.5}}{13} + c}$

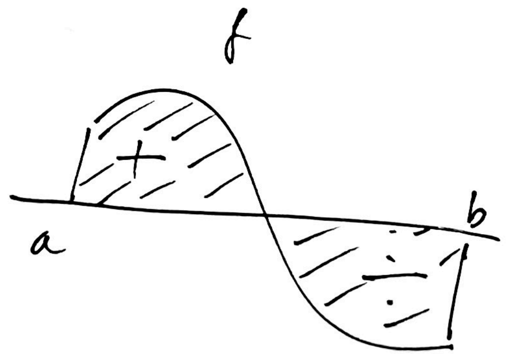
$\left(2 \cdot \dfrac{1}{6.5} \dfrac{\cdot 2}{\cdot 2} = \dfrac{2 \cdot 2}{13} = \dfrac{4}{13} \right)$

$\int 0 \cdot 2x\, dx = \underbrace{0 \cdot \int 2x\, dx}_{0} \; \underline{+\, C}$

$= C$

konstanten C (reelle tall c)

Bestemt integral



$\int_a^b f(x)\, dx$

"areal med fortegn" mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen.

11.115 Finn alle $u, v \in [0, \pi\rangle$

slik at $\sin(x+u) + \cos(x+v) = \sqrt{2}\cos x$ alle x

$$\sin(x)\cos u + \sin u \cos x + \cos x \cos v - \sin(x)\sin v = \sqrt{2}\cos x$$

$$\sin x\,(\underbrace{\cos u - \sin v}_{0}) = \cos x\,(\underbrace{\sqrt{2} - \cos v - \sin u}_{0})$$

like for alle x

$$\cos u = \sin v$$

$$\underbrace{\cos u + \sin v}_{\text{like}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u = \sin v = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Løsningen er $\underline{u = v = \frac{\pi}{4}}$

11.112 a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

$\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$

jevn

$\cos(v) = \cos(-v)$

$$= \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

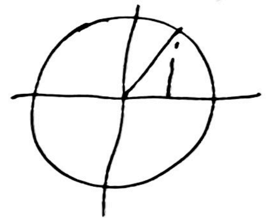
$$= \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos x \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cos x \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2} = \underline{\underline{\cos x}}$$

odde

$\sin(-v) = -\sin v$



---

oblig 6 #6 $f(x) = ax^3 - bx^2$ a, b parametre

$$f'(x) = a(x^3)' - b(x^2)' = 3ax^2 - 2bx$$

$$f''(x) = 6ax - 2b.$$

opg 15.23

$$(x\ln x - x)'$$

$$= (x\ln x)' - (x)'$$

$$= (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' - 1$$

$$= 1\cdot\ln x + \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1} - 1 = \ln x$$

så $(x\ln x - x)' = \ln x$

og $\int \ln x\, dx = \underline{x\ln x - x + C}$

Husk $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$

15.22 b) $\int \frac{1}{2x+1}\,dx$

$u(x) = 2x+1$

$u'(x) = 2$

$1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{u'}{2}$

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx = \underline{\frac{1}{2}\ln|\underbrace{2x+1}_{u(x)}| + C}$$