

6 april
2021

18.1 Mengdelære.

En mengde er en samling elementer

S mengde

x element i S

$$x \in S$$

x ikke et element i S : $x \notin S$

$\emptyset$ symbol for den tomme mengde. (har ingen elementer)

$$S = \{1, 2, 3\}$$

1, 2, 3 er elementene i S

$$2 \in S, \quad 7 \notin S$$

Elementene i en mengde er uten rekkefølge.

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

Vi kan lage mengde hvor elementene selv er mengder.

$$T = \{ \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, 2, 7, \emptyset \}$$

$$2 \in T \quad 1 \notin T, \quad (1 \in) \{1, 2\} \in T$$

To mengder er like hvis de inneholder de samme elementene.
 $x \in S \Leftrightarrow x \in T$: S og T er like mengder.

($B \supset A$ B inneholder A)

Delmengder

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

$$\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4, 5\}$$

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\} \ni \{1, 2\}$$

$$\emptyset \subset A, \text{ for alle mengder } A.$$

$$\left(\begin{array}{l} \{a\} \subset A \\ \Leftrightarrow a \in A \end{array} \right)$$

A er inneholdt i B
 (delmengde av B)

Russells paradoks:

"Mængden af alle mængder som ikke
indeholder sig selv"
giver en selvmodsigelse.

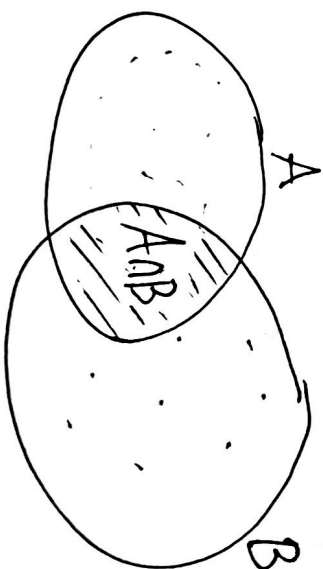
Shift af mængder

$S \cap T = T \cap S$ "shiftet af
er mængden af alle elementene
som er i både S og T"

$$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2\}.$$

$$\{K, M, P\} \cap \{A, B, C, M, N\} = \{M\}$$

Venn diagram



Union av mängder

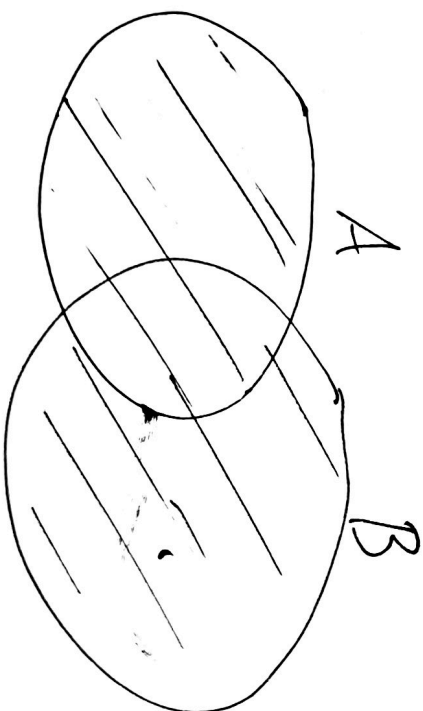
$$S \cup T = T \cup S$$

"Unionen av S og T"

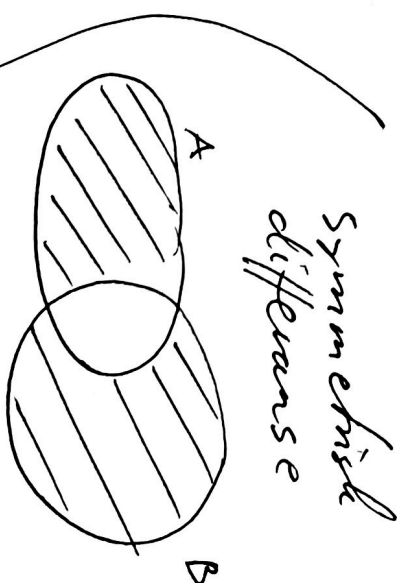
Mängden av alle elementene som er i S eller T
(inkludativ eller)

$$\{K, M, P\} \cup \{A, B, C, M, N\} = \{A, B, C, K, M, N, P\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \{a, a, a\} = \{a\} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \\ \text{samme element} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{l} \{a_1, a_2, a_3\} \\ \nwarrow \uparrow \nearrow \\ \text{forskjellige elementer.} \end{array} \right)$$



Kombinasjonen av områdene er $A \cup B$



Symmetrisk
differentanse

$A \cup B$ hvor
 $A \cap B$ fjernes.

Komplement

X grunnmengde

$$A \subset X$$

Komplement til A i X

$\bar{A} = X \setminus A = X - A$
er mengden av alle
elementer i X som ikke
er i A

$$X = \{A, B, C, 1, 2, 3\}$$

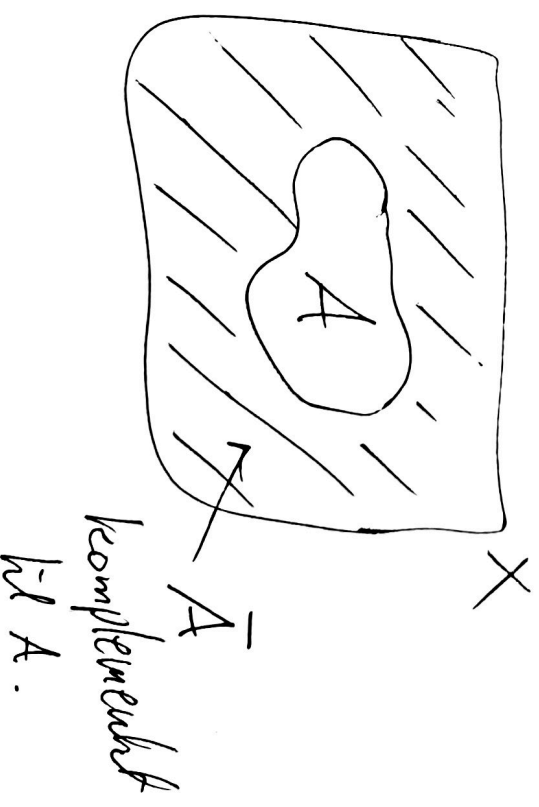
$$U = \{B, C, 3\}$$

$$\bar{U} = \{A, 1, 2\}$$

$$\bar{A} \cap A = \emptyset \quad \text{disjunkte}$$

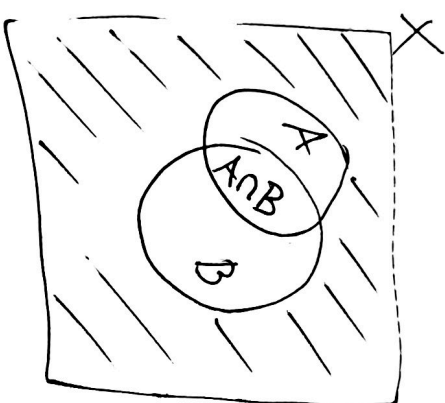
$$\bar{A} \cup A = X$$

(opdeling av X).

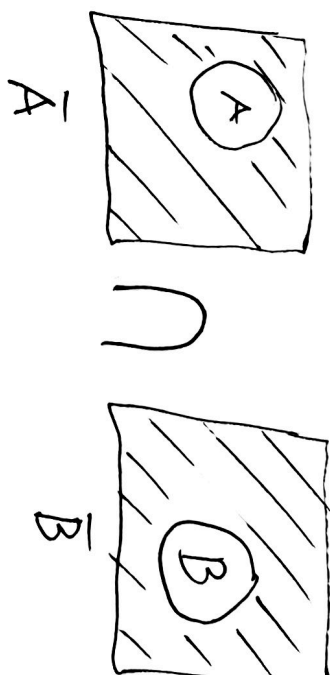


$A, B \subset X$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

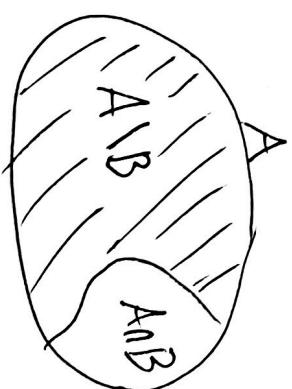
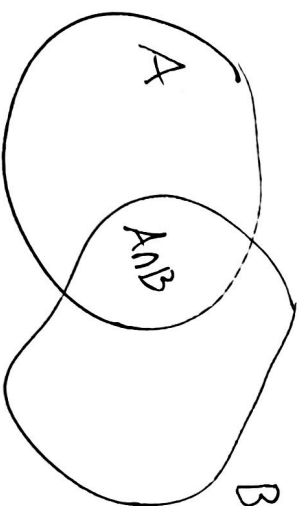


$=$



$$A \setminus B = A \setminus A \cap B$$

komplementiert ist $A \cap B$ i. A



Delmængder av $\mathbb{R}$

$[a, b]$ lukket intervall, mængden av alle $x \in \mathbb{R}$
s. a. $a \leq x \leq b$.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

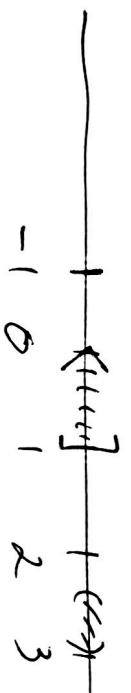
"alle $x \in \mathbb{R}$. slikt at $a \leq x \leq b$ er oppfylt".

$$[2, 2] = \{2\} \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline \text{-----} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \\ \text{-----} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \\ \hline \end{array} \quad [1, 3]$$

åpne intervall (a, b) alle x slikt at $a < x < b$.

halvåpne intervallene
 $[a, b)$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
 $\langle a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$$[0,1] \quad (2.5,3)$$



$$(-\infty, 2] = \{x \mid x \leq 2\} \dots$$

skillet $(\longrightarrow)$ $(\longrightarrow)$

$\Leftrightarrow$

$\{1, 2, \sqrt{5}\}$ mengden av talene $1, 2$ og $\sqrt{5}$,

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$(x-2)(x+2) > 0 \dots$$

$x < -2$ eller $x > 2$.

Løsninger

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

18.3

Multiplicationsprinsippet.

Kombinatorikk

En loppelopping
består av 12 kopper.

#Muligheter (måter å fylle
ut kopperen på)

$$3^{12} = 3^{2 \cdot 6} = (3^2)^6 = 9^6$$

$$= \underline{531441}$$

n muligheter (valg)
Gjør valget k ganger.

Antall
kombinasjoner

Tipping

	H	V	B

muligheter
3
3
3

$$\text{Der } 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$$

antall muligheter å
fylle ut kopperen.

Antall mulige
lister med k
valg er da n^k .

Antall forskjellige bilnummer.

BT 50573

2 bokstaver

5 siffer
forskjellige

(uteleser
(a, b, c, ...))

siffer er 10 (0, 1, 2, ..., 9)

forskjellige

bokstaver 26

$$26 \times 26 \times 10^5 = \underline{67.6 \cdot 10^6}$$

Antall forskjellige

bilnummer

7 prosent er det noen reserpsjon på
i tillegg skilt.

(Tallene fra 0 til 999999)

muligheter

574982

10^6

Naturlog full

6 siffer.

Passen



4 hall million 009 9

mögliche $\approx 10^4 = 10\,000$

Alternativ



← ord i A, B, C, D

med 10 bokstaver

$$4^{10} = (4^2)^5 = 16^5$$

oblig 7

$$4c) \int \frac{1}{x^3+5x} dx$$

variant: $\int \frac{1}{x^3-2x} dx$

Partialbruchspaltung

$$\frac{1}{x^3-2x} = \frac{1}{x(x^2-2)} = \frac{1}{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{2}}$$

Folles
neuner

$$\frac{1}{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \left[A(x^2-2) + Bx(x+\sqrt{2}) + Cx(x-\sqrt{2}) \right]$$

$$1 = A(x^2-2) + Bx(x+\sqrt{2}) + Cx(x-\sqrt{2})$$

$$1 = -2A$$

$$1 = B\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4B$$

$$1 = -C\sqrt{2}(-2\sqrt{2}) = +4C$$

Setze $x=0$

$$x=\sqrt{2}$$

$$x=-\sqrt{2}$$

$$A = \frac{-1}{2}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{+1}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x} dx = \int \frac{-1/2}{x} + \frac{1/4}{x - \sqrt{2}} + \frac{1/4}{x + \sqrt{2}} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \ln|x| + \underbrace{\frac{1}{4} \ln|x - \sqrt{2}| + \frac{1}{4} \ln|x + \sqrt{2}|}_{\frac{1}{4} \ln|x^2 - 2|} + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[\underbrace{-2 \ln|x|}_{\ln(x^{-2})} + \ln|x^2 - 2| \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^{2-2}}{x^2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$\text{verf: } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{4} + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$$

benutze
substitution

$$u = \frac{x}{2}$$

$$u' = \frac{1}{2}$$

$$du = \frac{1}{2} dx$$

$$2 du = dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+1} 2 du$$

$$= \frac{2}{4} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

#7 Torricelli's law

$$h' A(h) = -a \sqrt{2gh}$$

$$A_h = a + b\sqrt{h}$$

$$\left(A = \pi r^2 = \pi \left(a + b\sqrt{h} \right)^2 \right)$$

$$r = \sqrt{\frac{a}{\pi} + \frac{b}{\pi}\sqrt{h}}$$

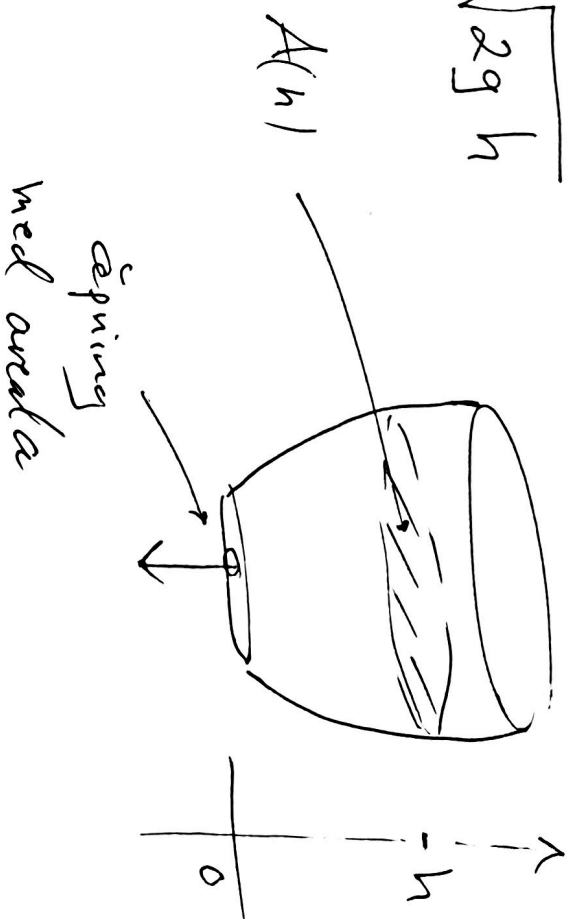
$$h' = -a\sqrt{2g} \left(\frac{\sqrt{h}}{a + b\sqrt{h}} \right)$$

$$A(h) = c + b\sqrt{h}$$

($c \geq a$)

separable diff. eqn

$$\int \frac{c + b\sqrt{h}}{\sqrt{h}} h' dt = \int -a\sqrt{2g} dt = -a\sqrt{2g} t + k$$



$$\int c \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{h}}}_{h^{-1/2}} + b \, dh = -a\sqrt{2g} \, t + K$$

$$c \frac{h^{1/2}}{\sqrt{2}} + b \cdot h = -a\sqrt{2g} \, t + K$$

$$2c\sqrt{h} + \underbrace{b \cdot h}_{b(\sqrt{h})^2} = -a\sqrt{2g} \, t + K$$

Dette er en 2-grads likning i $\sqrt{h}$.

$$b(\sqrt{h})^2 + 2c\sqrt{h} + a\sqrt{2g} \, t + K = 0$$

$$\sqrt{h} = \frac{-2c \pm \sqrt{(2c)^2 - 4b(a\sqrt{2g} \, t + K)}}{2b}$$

$$h(t) = \left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - b(a\sqrt{2g} \, t + K)}}{b} \right)^2$$

2-grads
formel

oblig 7
#6b.

$y' = \frac{x}{y}$
separated
diff likning

$$\int y y' dx = \int x dx$$

$$\int y dy = \int x dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 - x^2 = C$$

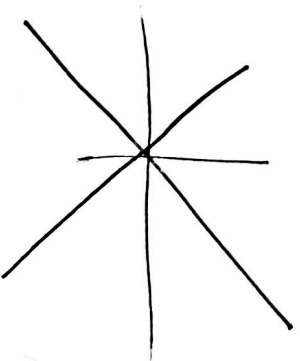
$$y^2 = x^2$$

$$y = \pm |x|$$

$$C=0$$

$y(3) = -4$
hvaaer $y(7)$?

Hyperbler.

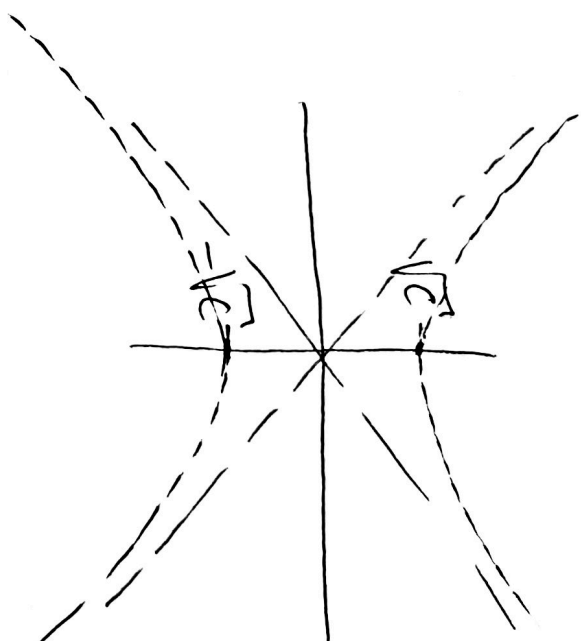


$$C > 0$$

$$y^2 = C + x^2$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C}$$

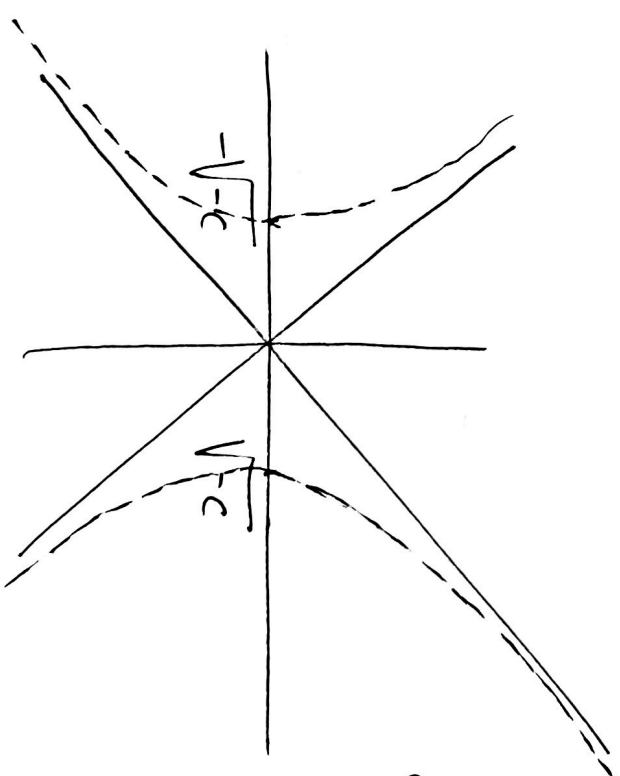
$$C > 0$$



$$C < 0$$

$$x = \pm \sqrt{y^2 - C}$$

$$C < 0$$



Løse initialveripullenst

$$y(3) = -4$$

$$y^2 - x^2 = C$$

$$(-4)^2 - (3)^2 = 7$$

$$y(x) = -\sqrt{x^2 + 7}$$

$$\text{Så } y(7) = -\sqrt{7^2 + 7}$$

$$= -\sqrt{7 \cdot 8} \approx -\sqrt{56} \approx \underline{\underline{7.48}}$$

Oppgave 2b (Feil!LF)

h(x)

skråasymptote

$$y = x - 1$$

vertikal

asymptote i $x = -3$.

Funksjonen

$$\frac{1}{x+3} + (x-1) \text{ har egenskaperne.}$$

$$= \frac{1}{x+3} + \frac{(x-1)(x+3)}{x+3} = \frac{1 + (x^2 - 3 + 3x - x)}{x+3}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 2}{x+3}$$

Finne en rasjonal funksjon

$R(x)$

slik at

$y = 3$ er en horisontal asymptote

oppg.

Forslag

$$\frac{3x-1}{x-2}$$



og

$x = 2$ er en vertikal asymptote.

=