

19.7 Uavhengighet

A er uavhengig av B hvis

$$\Leftrightarrow B \quad \text{---} \quad A$$

$$\frac{P(A|B) = P(A)}{P(B|A) = P(B)} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Betingelse sannsynlighet : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Eksempel

Sann.	A er 0,3	Sann for A og B = 0.2
Sann	B er 0.7	

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.7 \quad \text{og} \quad P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.7} \approx 0.2857 \approx 28.6\% < P(A) = 30\%$$

A og B er uavhengige hendelser.

hendelse B gir hendelse A mindre sannsynlig.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \approx 0.666 < P(B)$$

$$\frac{P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}}{P(A) \cdot P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

$\begin{cases} < 1: A \text{ gir } B \text{ mindre sann.} \\ = 1: \text{ uavhengige} \\ > 1: A \text{ gir } B \text{ mer sann.} \end{cases}$

Eks $\boxed{\textcircled{B} \textcircled{R}}$ treller ut tilfeldig.

første andre trell
 $\begin{matrix} H_B \\ H_{BB} \end{matrix} \downarrow \downarrow$
 $\left. \begin{matrix} H_{BR} \\ H_{RB} \end{matrix} \right\} H_{BogR}$
 H_{RR}

H_B treller ut
 H_R 1 ball

Uten tilbakelegging

$$P(H_B) = P(H_R) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_{BB}) = P(H_{RR}) = 0$$

$$P(H_{BR}) = P(H_{RB}) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_{BR} | H_B) = 1 \neq P(H_{BR}) = \frac{1}{2} \quad \text{afhængige.}$$

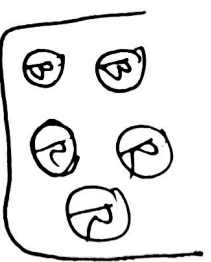
Med tilbagelægning. $P(H_{BR} | H_B) = P(H_R) = \frac{1}{2}.$

Hva vi får på tredje nr 2. er uafhængig af
hva vi trækker første gang.

$$P(H_B) = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$P(H_R) = \frac{3}{5} = 60\%$$

Trækker 2 kugler
uden tilbagelægning.



$$P(H_{BB} | H_B) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4} < \frac{2}{5} = P(H_B)$$

afhængige hændelser.

h blå kugler m røde kugler...

A_1, A_2, A_3

parvis
uavhengige

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

utføres
hå n
hendelser

$$P(A_1 | A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \cap A_3) \dots$$

Terninger

$$H_{\text{sum}} = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

$$\tilde{H} = H_{\text{en, eller begge}} \quad P(\tilde{H}) < 1$$

$$\tilde{H} \cap H_{\text{sum}} = H_{\text{sum}}$$

$$P(\tilde{H})$$

$$P(\tilde{H} | H_{\text{sum}}) = 1 \neq$$

avhengige hendelser.

$\tilde{H}$

(sum lik? impliserer $\tilde{H}$)

Eks

Er H_{sum4} uavhengig av $\tilde{H}$?

$$H_{sum4} \cap \tilde{H} = \{(1,3), (3,1)\}$$

$$H_{sum4} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

Komplement $\tilde{H} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$3 \times 3 = 9$ mulige utfall $P(\tilde{H}) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$

$$P(H) = 1 - P(\tilde{H}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$P(\tilde{H} | H_{sum4}) = \frac{P(\tilde{H} \cap H_{sum4})}{P(H_{sum4})} = \frac{2}{3} \approx 66.6\%$$

Nei, H_{sum4} og $\tilde{H}$ er avhengige.

$H_{\text{sum}5}$

$\tilde{H} = H$ mindst én af
ternene
viser 4

$= \overbrace{H_1, \text{tern} 1}^K \cup \overbrace{H_2, \text{tern} 1}^L$
er 4

snittet deres er $\{(4,4)\}$

Er hændelsene uafhængige?

$$H_{\text{sum}5} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$\tilde{H} \cap H_{\text{sum}5} = \{(1,4), (4,1)\}$$

$$P(\tilde{H} | H_{\text{sum}5}) = \frac{P(\tilde{H} \cap H_{\text{sum}5})}{P(H_{\text{sum}5})} = \frac{2/36}{4/36} = 50\%$$

$$H_{\text{va}} \text{ er } P(\tilde{H}) = P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \sim 30.5\%$$

Så hændelsene er afhængige, og hændelsene
går hånd i hånd.

opgave . Kaster en terning.

$H_{\geq 3}$, $H_{\geq 4}$, $H_{\geq 5}$, H_{odd}

Finn hendelsene som er uavhengige av hverandre.

$$H_{\geq 3} = \{ \underline{3}, 4, \underline{5}, 6 \}$$

$$H_{\geq 4} = \{ 4, \underline{5}, 6 \}$$

$$H_{\geq 5} = \{ \underline{5}, 6 \}$$

$$H_{\text{odd}} = \{ 1, 3, 5 \}, \quad P(H_{\text{odd}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(H_{\text{odd}} | H_{\geq 3}) = \frac{P(H_{\text{odd}} \cap H_{\geq 3})}{P(H_{\geq 3})} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2} = 50\% = P(H_{\text{odd}})$$

Så H_{odd} og $H_{\geq 3}$ er uavhengige.

$$P(H_{\text{odd}} | H_{\geq 4}) = \frac{P(H_{\text{odd}} \cap H_{\geq 4})}{P(H_{\geq 4})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \approx 33\% < P(H_{\text{odd}})$$

H_{odd} og $H_{\geq 4}$ er avhengige hendelser.

$$P(H_{\text{odd}} | H_{25}) = \frac{P(H_{\text{odd}} \cap H_{25})}{P(H_{25})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$= P(H_{\text{odd}})$$

Så hændelserne H_{odd} og H_{25} er uafhængige.

Når er hændelse $A \subset B$ uafhængige?

Når $P(B) = 1$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A) \text{ og likst når } P(B) = 1.$$

Så H_{23} , H_{24} og H_{25} er alle afhængige af hinanden.

H_{23} og H_{odd} uafhængige, H_{25} og H_{odd} er uafhængige, men H_{23} og H_{25} er afhængige.

Familie med 2 barn.

$$P(G_1) = P(j) = \frac{1}{2}$$

$$P(G_2 | G_1) = P(G_2 | j_1) = \frac{1}{2}.$$

$$P(GG) = P(G_1) \cdot \underbrace{P(G_2 | G_1)}_{P(G_2) \text{ uafhængighed}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Gj) = P(jG) = \frac{1}{4}$$

$$P(jj) = \frac{1}{4}$$

$$P(\overbrace{\{Gj, jG\}}^H) = \frac{1}{2}.$$

Sandsynlighed for én gut og én jente

$$P(H | G_1) = \frac{P(H \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(\{Gj\})}{P(\{GG, Gj\})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2} = P(H)$$

så H og G_1 er uafhængige.

$$P(GG | G_1) = \frac{P(GG \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(GG)}{1/2} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = 50\%$$

↑ ↑
afhængige hændelser.

$$\neq P(GG) = \frac{1}{4} = 25\%$$

19.174

$$P(T) = 22\%$$

$$P(T \cap L) = 10\%$$

$$P(L) = 30\%$$

$$a) P(T|L) = P(T \cap L) / P(L) = \frac{10\%}{30\%} = \frac{1}{3} \sim 33\%$$

$$P(L|T) = P(T \cap L) / P(T) = \frac{10\%}{22\%} = \frac{10}{22} \sim 0.4545 \sim 45\%$$

$$P(L \cup T) = P(L) + P(T) - P(L \cap T) = 0.3 + 0.22 - 0.1 = \underline{42.2\%}$$

b) T og L er afhængige hændelser.

$$P(T|L) = 33\% \neq P(T) = 22\%$$

$$19.175 \quad P(F) = 5\%$$

$$P(T) = 1 - 5\% = 95\%$$

- a) Gå ud fra at det ikke er nogen
sammenheng mellem hvilke dager
hun kommer for sent.

Sannsynligheten for at Anne kommer
tilskule er like store.

$$P(T_1) = 95\%$$

$$P(T_2 | T_1) = P(T_1)P(T_2)$$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2 | T_1) = P(T_1) \cdot P(T_2)$$

$$\begin{aligned} \text{tilsvarende} \quad P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 \cap T_5) &= P(T_1) \cdot P(T_2) \cdot P(T_3) \cdot P(T_4) \cdot P(T_5) \\ &= (0.95)^5 = 0.7773 \approx \underline{\underline{77.7\%}} \end{aligned}$$

$$b) P(\text{kommer for sent minst en dag}) = P(\overline{T_1 T_2 T_3 T_4 T_5}) = 1 - 77.7\% = \underline{\underline{22.3\%}}$$

19.162

Køberetter indkjøbt fra fabrikantene A, B, C)

Velgen en penn

$$P(A) = 50\%$$

$$P(B) = 30\%$$

$$P(C) = 20\% \\ = 1 - P(A) - P(B)$$

D pennen er defekt

$$P(D|B) = 5\%$$

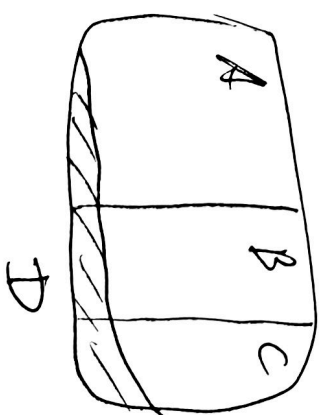
$$P(D|C) = 12\%$$

$$P(D|A) = 3\%$$

$$= P(A|D) \cdot P(D) \quad (\text{størrelser som vi ikke kender})$$

$$P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

$$\begin{aligned} a) \quad P(D \cap A) &= P(D|A) \cdot P(A) \\ &= 3\% \cdot 50\% \\ &= 1,5\% \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b) \quad P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$$= 1,5\% + 5\% \cdot 30\% + (12\% \cdot 20\%)$$

$$0,015 + \underbrace{0,05 \cdot \frac{3}{10}}_{0,015} + 0,024 = 0,054 = \underline{\underline{5,4\%}}$$

$$17.217 \quad \cos x (\sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \dots)$$

$$1 + x + x^2 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \text{divergent} & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{geometrische Reihe.}$$

$$\cos x \cdot \sin x (1 + (\sin^2 x) + (\sin^2 x)^2 + \dots)$$

$$= \begin{cases} \cos x \sin x \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 x} & \text{n\u00e4r } |\sin x| < 1 \\ 0 & \text{n\u00e4r } |\sin x| = 1 \end{cases}$$

(da $\cos x = 0$)

$$= \begin{cases} \tan(x) & \text{n\u00e4r } |\sin x| < 1 \\ 0 & |\sin x| = 1. \end{cases}$$