

21.04
2021

19.8 Binomisk fordeling.

Binomisk forsl.

Giører et forsl med to utfall ^{måte} n ganger.
Antar de stokastiske forslene er uavhengige.
Kjenner sannsynlighetene for de to utfallene A, B .
Hva er sannsynligheten for å få resultat A k ganger?

Eller Mynt-kron

Utfallsrom

$$P(M) = P(K) = \frac{1}{2}$$
$$S = \{ \underbrace{M M M \dots M}_n, \underbrace{M M \dots M K}_{n-1}, \dots \}$$

2^n elementer.

$X: S \rightarrow \mathbb{R}$ Stokastisk funksjon

$$X(M M M M K \dots K) = \text{antall } K\text{-er} = \# K\text{-er} = \left(\tilde{X}^{-1}(a, \infty) \text{ målverdi} \right)$$

Hva er sannsynligheten for at $X = k$?

$$P(\bar{X}^{-1}(k)) = P(X = k)$$

↑ sannsynligheten til hendelsen
vi har k kren.

I vårt tilfelle $P(k) = P(n)$ er alle ord i M og k like sannsynlige
sannsynligheten for hvert ord er $\frac{1}{2^n}$.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{1}{2^n} \cdot \text{antall ord med } k \text{ kren.} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \end{aligned}$$



$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

ord med k kren
ordlengde n

$$P(A) = p \quad P(B) = q = 1 - p$$

Utfører forsøket n ganger (uavhengige resultater)

$X: S \rightarrow \mathbb{R}$ antall ganger utfallet blir A .

$$\begin{aligned} \text{Binomiske formel:} \quad (p+q)^n &= (p+q)(p+q) \dots (p+q) \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{p^k q^{n-k} \binom{n}{k}}_{\substack{\text{sannsynligheten for å få} \\ k \text{ } A\text{-er.}}} \end{aligned}$$

$$\text{Uavhengige hendelser} \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \dots P(A_n)$$

$$P(X=k) = \frac{p^k q^{n-k} \binom{n}{k}}{1}$$

$$p = q = \frac{1}{2} \quad P(X=k) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$$

$$p=0, q=1$$

$$P(X=k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (0^0=1)$$

Eksempel

Kaster en ihle-rettet skilling Mynd 5 ganger

$$P(k) = 0.55$$

$$P(M) = 0.45$$

X antall ganger Vi får kaster

$$\begin{aligned} P(X=3) &= (P(k))^3 (P(M))^2 \binom{5}{3} \\ &= (0.55)^3 (0.45)^2 \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1}\right) \\ &= 10 (0.55)^3 (0.45)^2 = 0.337 \sim 33.7\% \end{aligned}$$

$$P(X=2) = (0.55)^2 (0.45)^3 \cdot \binom{5}{3} \\ = \frac{0.45}{0.55} \cdot P(X=3) = 27.6\%$$

$$P(X=2 \text{ eller } 3) = P(X=2) + P(X=3) \\ = 33.7\% + 27.6\% = 61.3\%$$

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ \text{regne ut og læ summene.} \\ = 1 - P(X=5) = 1 - (0.55)^5 (0.45)^0 \binom{5}{5} \\ = \underline{\underline{95\%}}$$

Kaster en tilfeldig terning 4 ganger.

Hva er sannsynligheten for å få 5 to ganger

X antall 5-ere.

$$P(X=2)$$

$$P(X=1)$$

(Sannsynlighet for å få 5 når vi kaster én gang $\sim \frac{1}{6}$)

$$\frac{5^3 \cdot 1}{6^4} \sim 38.6\%$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 \binom{4}{1} =$$

$$= \frac{5^3 \cdot 6}{6^4} \sim 11.6\%$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \binom{4}{2}$$

$$= \frac{5^2 \cdot 6}{6^4} \sim 4.82\%$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \binom{4}{0} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 48.2\%$$

$$P(X=0)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=3) = 1 - 0.482 - 0.116 - 0.386$$

$\sim 0.016 \sim 1.6\%$ all
for uregelmessig

$$P(X=4)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4} \sim \underline{\underline{0.07\%}}$$

Oppgave

Retfærdig terning kastes 5 ganger.

Står 6 allerede 2 ganger?

Hva er sannsynligheten for å få

$\begin{pmatrix} \dots 55 \\ \dots 66 \\ \dots 56 \end{pmatrix}$

$$A = \{5, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

X Stokastiske funksjonen
avfall utfall: A

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2^3}{35} \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \approx 32.9\%$$

$$P(6) = 0.2$$

$$P(5) = 0.18$$

Uretfærdig terning.

Hva er sannsynligheten for å få 5 eller 6 allerede 2 ganger
når vi kaster terningen 5 ganger?

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(5) + P(6) \\
 &= 0.2 + 0.18 \\
 &= 0.38
 \end{aligned}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 0.62$$

$$P(X=2) = (0.38)^2 (0.62)^3 \binom{5}{2} = \underline{34.4\%}$$

gennemsnitsværdien	h _i	X	er	P · n
variansen	σ ²			P · q · n
Standard afvigelse	σ		er	$\sqrt{P \cdot q \cdot n}$
n stor		P(X)	tilnærmes	af en normalfordeling