Innlevering	FORK1100 - Matematikk forkurs Oslomet
	Obligatorisk innlevering 7
Frist	Onsdag 7. april 2021

Bruk gjerne geogebra eller lignende til å sjekke svaret dere kommer frem til. For eksempel i oppg. 1 og 3 kan dere plotte grafen til uttrykkene og finne estimater for løsningene til ulikhetenelikningene. Bestemte integraler kan regnes ut numerisk og sammenlignes med svaret dere får. Dere kan og derviere antideriverte for å sjekke at de faktisk er antideriverte.

1

Løs likningene

a) $\sqrt{x} > -1$

b) $x \leq x^3 - x^2 - x$

c) $\log \left| \frac{x+5}{x-1} \right| > 1$

d) $\sin(x - \pi/2) < \sin(x + \pi/4)$ (hint: Bruk trigonometriske identiteter.)

2

Eksponentreglene er

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{og} \quad a^{xy} = (a^x)^y$$

Logaritmen med basis a av et tall z er eksponenten til a som gir z

$$a^{\log_a z} = z$$

Forklar hvordan eksponentreglene gir logaritmereglene

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y) \quad \text{og} \quad r \log_a(x) = \log_a(x^r)$$

Her er a positiv og ulik 1.

3

Løs likningene

a) $10^x 2^{2x} = 5^{x+1}$

b) $\ln(4^x - 2) = \ln(10^x) - \ln(5^x)$

c) $\ln(1 - x^2) = \ln(x - x^2) + 1$

4

Løs de bestemte og ubestemte integralene

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x(1 + x^2)^3 \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x^3}{x^2 - 4x - 5} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + 5x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \sin(x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

5

Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere grafen til

$$f(x) = 1 + x^{3/2}$$

om x-aksen fra $x = 0$ til $x = 3$.

6

a) Løs differensiallikningene

$$y'(x) = -x/y$$

Finn løsningen slik at $y(3) = -4$. Hva er verdien til $y(7)$ for denne løsningen (hvis det gir mening)?

b) Løs differensiallikningene

$$y'(x) = x/y$$

Finn løsningen slik at $y(3) = -4$. Hva er verdien til $y(7)$ for denne løsningen (hvis det gir mening)?

c) Hva slags geometriske objekter er grafene til løsningen av de to differensiallikningene ovenfor (deler av)?

Hint: Begge diff likningene er separable. Løs dem. Vær nøye med å få med "integrasjonskonstanten".

7

Torricellis lov beskriver hvordan en ideell væske renner ut av en beholder. Anta tverrsnittet til beholderen ved høyde h er gitt ved $A(h)$ og arealet til åpningen i bunnen av beholderen er a. Det forutsettes at a er mye mindre enn $A(h)$. Væsken renner ut ved høyde $h = 0$. Da er høyden som en funksjon av tiden bestemt av differensiallikningen

$$h'(t)A(h(t)) = -a\sqrt{2gh(t)}$$

a) Bestem $h(t)$ når beholderen er sylindrisk (A er konstant). Vis at (gjennomsnitts)farten på vannet som renner ut en lineær funksjon i tiden t.

b) Finn høyden som en funksjon av tiden når $A(h) = a + b\sqrt{h}$. Finn høyden som en funksjon av parametrene $a, b > 1$. Hvis det er vanskelig, la $a = b = 1$, og benytt $A(h) = 1 + h$.

8

Dette er en variasjon av den logistiske differensiallikningen. Anta at vi har en populasjon med P (ikke-immune) individer. La antall smitta individer ved tiden t være $y(t)$ (dette teller også med de som har blitt friske igjen, og immune). Anta at spredningen er proporsjonal til produktet av kvadratroten av y og antall som ikke allerede er smitta. Vi får da at

$$y'(t) = k\sqrt{y(t)}(1 - y(t)/P)$$

Firdobles antall smitta vil andelen nye som blir smitta (blant de som ikke er smitta) bare dobbles.

Løs denne differensiallikningen. Sammenlign gjerne grafen med grafen til løsningen til den logistiske differensiallikningen. Juster parametre som andel smitta ved tiden 0, $y(0)/P$, P og vekstfaktoren k.