Matte forkurs oppgaver 19. april 2021

Løsningsforslag

1

Vi har en krukke med 5 gule baller og 7 røde baller.

a) Regn ut antall mulige uordna uttrekk uten tilbakelegging av 9 baller?

b) Regn ut antall mulige uordna uttrekk med tilbakelegging av 9 baller?

c) Regn ut antall mulige ordna uttrekk av 9 baller uten tilbakelegging? Husk at vi ikkje kan skille mellom baller av samme farge.

d) Regn ut antall mulige ordna uttrekk av 9 baller med tilbakelegging?

LF: a) Det er <u>fire muligheter</u> : 2 gule og 7 røde, 3 gule og 6 røde, 4 gule og 5 røde, og til sist 5 gule og 4 røde.

b) Her er det <u>10 muligheter</u>. De ulike mulighetene er bestemt av antall gule baller fra 0 til 9. Det blir 10 muligheter.

c) Vi teller hvor mange ulike kombinasjoner vi har med 2, 3, 4, og 5 gule baller og tar summen av dem. Det gir oss

$$\sum_{k=2}^{5} \binom{9}{k} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \underline{372}$$

Dette kan man regne ut i geogebra for eksempel ved å lage listen
Følge(nCr(9, k), k , 2 , 5)
Ta deretter summen av listen. sum(navn på listen)

d) I hvert uttrekke kan vi få gul eller rød ball. Fra multiplikasjonsprinsippet blir da antall muligheter lik

$$2^9 = \underline{512}$$

Legg merke til at dette er lik summen

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k}$$

fra binomialformelen.

2

Vi har to urettferdige terninger hvor sannsynligheten for å få verdi i er lik i/k for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ for en konstant k.

a) Hva må k være?

b) De to terningene kastes. Regn ut sannsynligheten for at summen av det de to terningene viser er lik n, for hver av de 11 verdiene verdiene n fra 2 til 12? Hvilke verdier forekommer oftest?

c) Hva skjer hvis den ene terningen byttes ut med en terning hvor sannsynligheten for å få verdien i er lik $7 - i$, for hver verdi i mellom 1 og 6? Vil sannsynligheten for at summen skal være lik n samsvare med sannsynligheten vi får hvis vi bruker to rettferdige terninger? Hvis ikke, hvilke verdier mellom 2 og 12 har samme sannsynlighet i de to tilfellene?

LF: a) Sannsynligheten for hele utfallsrommet S er lik 1. Derfor har vi

$$P(S) = P(\{1\}) + \cdots + P(\{6\}) = \frac{1+2+3+4+5+6}{k} = \frac{21}{k} = 1$$

Vi må derfor ha at $\underline{k = 21}$.

b) La X være den stokastiske variabelen som gir summen av utfallet til to terninger som kastes. Vi skal finne $P(X = n) = P(X^{-1}(n))$. Vi har

$$P(X = n) = \sum_{i+j=n} \frac{i \cdot j}{21^2}$$

hvor summen er over alle i, j mellom 1 og 6 slik at summen dere er lik n.

Vi får da

$$P(X = 2) = \frac{1}{21^2}$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{21^2}$$

$$P(X = 4) = \frac{3+4+3}{21^2} = \frac{10}{21^2}$$

$$P(X = 5) = \frac{4+6+6+4}{21^2} = \frac{20}{21^2}$$

$$P(X = 6) = \frac{5+8+9+8+5}{21^2} = \frac{35}{21^2}$$

$$P(X = 7) = \frac{6+10+12+12+10+6}{21^2} = \frac{56}{21^2}$$

$$P(X = 8) = \frac{12+15+16+15+12}{21^2} = \frac{70}{21^2}$$

$$P(X = 9) = \frac{18+20+20+18}{21^2} = \frac{76}{21^2}$$

$$P(X=10)=\frac{24+25+24}{21^2}=\frac{73}{21^2}$$
$$P(X=11)=\frac{30+30}{21^2}=\frac{60}{21^2}$$
$$P(X=12)=\frac{36}{21^2}$$

For å teste om vi har regnet galt et sted kan vi ta summen av disse sannsynlighetene og sjekke at summen blir lik 1. Vi får

$$1+4+10+20+35+56+70+76+73+60+36=441=21^2$$

Vi ser at verdien som forekommer oftest er verdien $X=9$.

c) La Y være den stokastiske variabelen som er summen av verdiene til de to terningene som kastes. I dette tilfellet vil sannsynligheten være gitt ved

$$P(Y=n)=\sum_{i+j=n}\frac{i\cdot(7-j)}{21^2}=\sum_i\frac{i\cdot(7+i-n)}{21^2}$$

hvor summen er over gyldige i.

$$P(Y=2)=\frac{6}{21^2}$$
$$P(Y=3)=\frac{5+12}{21^2}=\frac{17}{21^2}$$
$$P(Y=4)=\frac{18+10+4}{21^2}=\frac{32}{21^2}$$
$$P(Y=5)=\frac{3+8+15+24}{21^2}=\frac{50}{21^2}$$
$$P(Y=6)=\frac{2+6+12+20+30}{21^2}=\frac{70}{21^2}$$
$$P(Y=7)=\frac{1+4+9+16+25+36}{21^2}=\frac{91}{21^2}$$
$$P(Y=8)=\frac{2+6+12+20+30}{21^2}=\frac{70}{21^2}$$
$$P(Y=9)=\frac{3+8+15+24}{21^2}=\frac{50}{21^2}$$
$$P(Y=10)=\frac{18+10+4}{21^2}=\frac{32}{21^2}$$
$$P(Y=11)=\frac{5+12}{21^2}=\frac{17}{21^2}$$
$$P(Y=12)=\frac{36}{21^2}$$

Vi tester at summen av sannsynlighetene blir lik 1, Vi har

$$2\cdot(6+17+32+50+70)+91)=441$$

(Eg oppdaget noen små unøyaktigheter når eg testet dette, som eg da fikk rettet opp.)

Vi ser at verdien som forekommer oftest er verdien $Y=7$.

Vi får samme sannsynlighet for $X=8$ som for $Y=8$.

3

Vi har en krukke med 5 gule baller 7 røde baller og 3 blå baller. Vi trekker baller fra krukken. Det er samme sannsynlighet for å trekke hver av ballene.

a) Vi trekker ut 3 baller uten tilbaketrekking. Hva er sannsynligheten for at vi trekker akkurat en av hver farge? (Rekkefølgen de trekkes i er likegyldig).

b) Tre baller trekkes ut. Hva er sannsynligheten at alle ballene som trekkes ut har samme farge. Regn gjerne ut sannsynligheten for å bare trekke baller med samme farge for de tre fargene.

c) Fire baller trekkes ut. Hva er sannsynligheten for at 3 av ballene er røde og en av ballene er gul?

Sjekk gjerne hypergeometrisk fordeling (Wikipedia). Hva er sannsynligheten for å trekke g gule, r røde og b blå baller (uordna og uten tilbakelegging)?

LF:

a) Vi regner ut sannsynligheten for å trekke ut i rekkefølgen grønn, rød og blå. De andre fem rekkefølgene har samme sannsynlighet. Derfor er sannsynligheten lik

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot 6 = \frac{3}{13} \simeq 0.23077$$

b) Sannsynligheten for å trekke ut tre gule baller er lik

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2}{91} \simeq 0.02198$$

Sannsynligheten for å trekke ut tre røde baller er lik

$$\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{1}{13} \simeq 0.07692$$

Sannsynligheten for å trekke ut tre blå baller er lik

$$\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{455} \simeq 0.0022$$

Summen av disse tre er sannsynlighetene er lik sannsynligheten for å trekke ut tre like baller. Den er lik

$$\underline{\frac{46}{455}} \simeq 0.1011$$

Så ganske nær 10 prosent.

Det generelle problemet: Sannsynligheten er lik

$$\frac{\binom{5}{g} + \binom{7}{r} + \binom{3}{b}}{\binom{5+7+3}{g+r+b}}$$

Det blir ikke gitt løsningsforslag til den siste oppgaven.