16 august 2021

1.1 Naturlige tall

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ mengde

elementer.

"element i"

$2 \in \mathbb{N}$

1

H.

Fauske

$\{1,2,4\} \subset \mathbb{N}$

"delmengde av"

Addisjon +

$2+3=5$

$3+2=5$

$\boxed{x+y = y+x}$ kommutativitet ~~assosiativitet~~

$(2+3)+4 = 5+4 = 9$

$2+(3+4) = 2+7 = 9$

$\boxed{(x+y)+z = x+(y+z)}$ assosiativitet

sum av n-tall er vell-definert

2 4 3 8

velger rekkefølge

$(2+4)+(3+8) = 6+11 = 17$

uavhengig av valgene vi gjør.

eks $2+13+18+19+7+21$ velger en rekkefølge som gjør det enklere å regne.

② $= (2+18) + (13+7) + (19+21)$

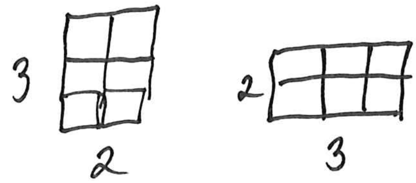
$20 + 20 + 40 = \underline{80}$

Multiplikasjon

$a\cdot b = a\times b = \overbrace{b+b+\cdots+b}^{a}$

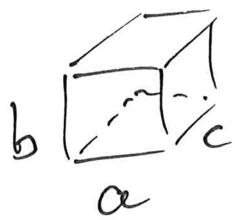
a kopier av b.

$a\cdot b = b\cdot a$ kommutativ



$(a\cdot b)\cdot c = a(b\cdot c)$

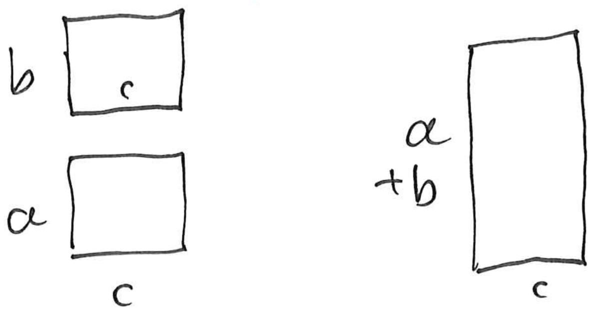
assosiativt



Transitivitet

$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

(ganger ut parenteser)



1 enhets element for multiplikasjon

$1\cdot a = a$

Definisjon $\quad a$ <u>deler</u> b hvis

3

$b = a \cdot c$ for et tall c.

2 deler 6 : $\quad 6 = \underline{2} \cdot 3$

13 deler 39 $\quad 39 = 3 \cdot 13$.

2 deler ikkje 5 $\quad$ ($5/2 = 2.5$ ikkje heiltall)

inverer additiv enhetselement : 0

$20 + 0 = 20$

$13 + 0 = 13$

$0 + 13 = 13$

$a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot (\underbrace{1+0}_{1}) \overset{\text{tr.}}{=} a \cdot 1 + a \cdot 0$$

$$= a \cdot 1$$

Så $\quad a = a + a \cdot 0$

Derfor er $\quad a \cdot 0 = 0$.

Legger til additive inverselemente

$$3 + (-3) = 0$$

$7 - 3 = 4$ $\qquad$ $3 - 7$?

ikke et nat. tall.

4

$a + (-a) = 0$ $\qquad$ a nat. tall.

$$(-2) + (-3) + \underbrace{2+3}_{5}$$

$$= \underbrace{((-2)+2)}_{0} + \underbrace{(-3)+3}_{0} = 0$$

Derfor er $(-5) = (-2) + (-3)$.

$$(-a) + (-b) = (-(a+b)).$$

$$2(\overbrace{3 + (-3)}^{0}) = 2 \cdot 0 = 0$$

transitivt: $\underbrace{2 \cdot 3}_{6} + 2(-3) = 0$

$= 0$

Derfor er $2(-3) = -6$.

$$(-a)(-b) = (a \cdot b)$$

$$(-2)(-3) = 6$$

5

$$(-a)(\overbrace{b + (-b)}^{0}) = 0$$

$$\underbrace{(-a) \cdot b}_{-(a \cdot b)} + (-a)(-b) = 0$$

$$-(a \cdot b) + \ ? = 0$$

Derfor er $(-a)(-b) = a \cdot b$

$$2 - 3 = 2 + (-3)$$

Parentes konvensjoner.

$$(((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5) \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

tungvint

$$(2 + 3) \cdot 4 = 20 \qquad 2 + (3 \cdot 4) = 14$$

$$2 + 3 \cdot 4$$

Multiplikasjon før addisjon.

$2-(3-4) = 3$ ikke assosiativt.

$(2-3)-4 = -5$

$2-3-4$ Regneoperasjoner (av samme type!) utføres fra venstre til høyre.

(6) betyr derfor

$(2-3)-4$

$2+(-3)+(-4)$ + er assos. kom..

Hva er $2-(3-4)$

$$= 2+(-1)\cdot(3-4)$$

$$= 2-3+(-1)(-4)$$

$$= 2-3+4 = 3.$$

Potenser

eksponent → n, grunntall → a

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ kopier av } a}$$

n nat tall

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

7

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Potensreglene

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\overbrace{a \cdots a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m}$$

$$= \overbrace{a \cdots a}^{n+m}$$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

$$\underbrace{\overbrace{a \cdots a}^{n}\ \overbrace{a \cdots a}^{n}\ \cdots\ \overbrace{a \cdots a}^{\text{nàa}}}$$

$$\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \cdot m}$$

$$(3^2)^4 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3)$$

$$= 3^{2 \cdot 4} = \underline{3^8}$$

Potenser utføres før multiplikasjon

$(2 \cdot 3)^2 = 36$ $\qquad$ $2 \cdot (3^2) = 18$

$2 \cdot 3^2$ //

8

$(-2)^2 = 4$ $\qquad$ $-2^2 = (-1) \cdot 2^2$

$-(2^2) = -4$ //

$3 - 2^4 = 3 + (-1) \cdot 2^4$

$= 3 + (-1) 16 = -13.$

$$2 - 3 = 2 + (-1) \cdot 3$$
$$2 + (-3)$$

subtraksjon kan skrives som en sum.

$a - b = a + (-b)$

$= a + (-1) \cdot b$

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

9

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 1$$

↖ multiplikativ invers.

$$\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \quad \text{hvor} \quad \frac{1}{b} \cdot b = 1$$

Hvorfor har vi ikkje $\frac{1}{0}$?

$$\left(\frac{1}{0}\right) \cdot 0 = 1$$

gangermed 0 så også lik 0.

så $0 = 1$

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$$

så $\frac{1}{0}$ tvinger alle tall til å være lik 0.