24.08.2021. Likninger og kvadratiske uttrykk.

$3x - 7 = 0$ $\qquad\qquad$ $ax + b = 0$

1) $3x \underbrace{-7+7}_{0} = 7$, $\quad 3x = 7 \mid \frac{1}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{-b}{a}$ $\quad a \neq 0$

$\underline{x = \frac{7}{3}}$

$\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x+3}$ $\quad x \neq -3, 2.$ $\Leftrightarrow$ $(x+3) = 2(x-2)$, $x \neq -3, 2$

gänger opp med
$(x-2)(x+3)$ (ulik 0!)

$\Leftrightarrow$ $x+3 = 2x - 4$, $x \neq -3, 2$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $3 + 4 = 2x - x$

$\underline{7 = x}$

test: setter inn $\quad \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}$

$\frac{2}{7+3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ✓

2

$(x-2)(x+3) = 0 \iff x-2=0$ eller $x+3=0$

$\Updownarrow$

$x=2$ eller $x=-3$.

$x^2+3x-2x-6 = 0$

$x^2+x-6 = 0$

2.grads likning.

Løsningene er $\underline{x=-3 \text{ og } x=2}$

$a \cdot b = 0 \iff a=0$ eller $b=0$

(eller både $a=0$ og $b=0$)

$x^2(2x+5)(x/3 - 2) = 0 \iff x^2=0$ eller $2x+5=0$ eller $x/3-2=0$

$\iff x=0$ eller $x=\frac{-5}{2}$ eller $x=6$

$$\left(\begin{aligned} \frac{x}{3} - 2 &= 0 \\ \frac{x}{3} &= 2 \quad | \cdot 3 \\ x &= 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned} \right)$$

Løsningene er $\underline{x = \frac{-5}{2}, 0, 6}$

$x \in \{\frac{-5}{2}, 0, 6\}$

eller $\vee$ $\qquad$ $x=2 \vee x=3$

og $\wedge$

ikkje $\neg$

3)

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0 \iff x=0 \vee x-3=0$

Løsningene er $\underline{x=0}$ og $\underline{x=3}$

oppg. 1) $x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x=0 \vee x-4=0$

Løsningene er $x \in \underline{\{0,4\}}$

2) $x^2 - 4 = 5$

$x^2 - 4 - 5 = 0$

$x^2 - 9 = 0$ konjugat-

$(x+3)(x-3) = 0$ setning.

$x+3=0$ eller $x-3=0$

Løsningene er $\underline{x \in \{-3,3\}}$

$x^2 - 4 = 5$

$x^2 = 5 + 4 = 9 \; (= 3^2)$

$x = \pm\sqrt{9} = \underline{\pm 3}$

4 $\quad x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 = a \quad , \quad a \geq 0$

$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$

Løsningene er $x = \pm\sqrt{a}$

$(x = \sqrt{a}$ og $x = -\sqrt{a})$

$x^2 = 25 \quad , \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x^2 = 13 \qquad x = \underline{\pm\sqrt{13}}$

* $\quad x^2 = -9$ ingen reelle løsninger

$x^2 + 9 \geq 9$ for alle x.

oppgaver

Løs:

$$x^2 = 49$$
$$x = \pm\sqrt{49} = \underline{\pm 7}$$

$$x^2 = -36$$
ingen (reell) løsning.

$$4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \underline{\pm 2}$$

5)

$$5x^2 - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 = 7 \quad \Big| \tfrac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{5}$$
$$x = \underline{\pm\sqrt{\frac{7}{5}}}.$$

(2.7 i boka)

$$(x-1)^2 = 4$$
så $(x-1) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
$$x = 1 \pm 2$$
$x = -1$ og $x = 3$.

$$\Leftrightarrow x^2 + (-1)^2 + 2x(-1) = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x}_{(x+1)^2 - 1} - 8 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 - 8 = 0$$

$$(x+1)^2 - 9 = 0$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$$

6

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

$$x = -1 \pm 3$$

så løsningene er $\underline{x = -4}$ og $\underline{x = 2}$

Fullføring av kvadratet

2.6 i boken

$$x^2 + bx + c = \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + c - \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 + bx + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}_{c}$$

7

$$x^2 + x + 1 \ (= 0)$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

fullført kvadratet

oppgave

Fullfør kvadratet $x^2 + 4x - 5$

$$= (x+2)^2 - 4 - 5$$
$$= \underline{(x+2)^2 - 9} = (x+2)^2 - 3^2$$
$$= (x+2+3)(x+2-3)$$
$$= (x+5)(x-1)$$

(Bruker det fullførte kvadratet til å faktorisere)

$$x^2 - 6x + 9 = \left(x - \frac{6}{2}\right)^2 - (3)^2 + 9$$
$$= (x-3)^2 - 9 + 9$$
$$= \underline{(x-3)^2}$$ Fullstendig kvadrat.

8

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{minste verdi til } x^2+bx+c}$$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ er lik 0 når $x = -\frac{b}{2}$

Grafen til x^2+bx+c er grafen til x^2 forskyvd med $-\frac{b}{2}$ horisontalt, $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ vertikalt

oppg $x^2 - x - 1 \ (=0)$

Fullfør kvadratet
Faktoriser
Løs likningen.

9

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 1 &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 - 1 \\
&= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 1 \\
&= \underline{\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}} \\
&= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \underline{\left(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)} \quad \text{faktorisert}
\end{aligned}
$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \iff x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2} = 0 \quad \text{eller} \quad x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$$

Løsningene er $\underline{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$ og $\underline{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$

Resten av notatene
er fra øvingstimen.

Faktorisering, typisk vanskelig.

Her er noen eksempler hvor vi kan finne faktoriseringen

$$x^3 - 3x = x(x^2-3)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

10

$x \neq 0, 1$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x}$$

$$= \frac{(x-1) - 2 \cdot x}{x(x-1)} = \frac{-x-1}{x(x-1)} = \underline{\frac{-(x+1)}{x(x-1)}}$$

$$= (-1)(x+1) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{(x-1)}$$

2.62a) $x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 16 + 12$

$$= (x-4)^2 - 4 = (x-4)^2 - 2^2$$

Fullføring av kvadrat.

$$= (x-4+2)(x-4-2)$$

$$= \underline{(x-2)(x-6)}$$

x^2+1 kan ikke skrives som et produkt av to lineære uttrykk.

11

fordi $x^2+1 \geq 1$ for alle x.
(aldri like 0)

2.71 e) $(x+2)^2 = 1$ La $y = x+2$
($x = y-2$)

1) $y^2 = 1 \iff y^2 - 1 = 0$
$(y-1)(y+1) = 0$

$y = \pm 1$

$y = x+2 = \pm 1$

2) $x = \pm 1 - 2$

Løsningene er $\underline{x = -3}$ og $\underline{x = -1}$

(12)

Faktoriser $x^4 - 16 = x^4 - 2^4$

$$= (x^2)^2 - (2^2)^2$$

$$= (x^2+2^2)(x^2-2^2)$$

$$= (x^2+2^2)(x+2)(x-2)$$

konjugat setning.

$$x^4 - 16 = \underline{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$$

$\cancel{x}$ $(x-2)^4$

$$(x-2)^2 = x^2 + (-2)^2 + 2(-2)x$$

$$= x^2 + 4 - 4x$$

oppg. Hva er den minste verdien x^2-3x+1 kan ha.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 1 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \underbrace{1-\frac{9}{4}}_{\frac{4}{4}-\frac{9}{4}}$$

$$= \underbrace{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}_{\substack{\geq 0 \text{ bare} \\ \text{lik } 0 \text{ for } x=3/2}} - \frac{5}{4}.$$

Den minste verdien til x^2-3x+1 er $\underline{-5/4}$ (når $x=3/2$)

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \underbrace{x \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot x}_{bx} + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{0}$$

13

Oppgave

Løs likningen

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = 1 \qquad x \neq -2, 1$$

Felles nevner

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+2)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2+(x-1) = (x-1)(x+2) \qquad \text{for } \underline{x \neq -2, 1}$$

$$2x+1 = x^2 - x + 2x - 2$$

$$= x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \overbrace{- \frac{1}{4} - \frac{12}{4}}^{-\frac{13}{4}} = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \quad \text{så} \quad \underline{x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}}$$