31. august 2021

3.3-4 Ulikheter

$<, >, \leq, \geq$

$3 > 2$ "større enn"

Sann

$2 > 5$

Galt

(ekte større enn
$3 > 2$ sant
$3 > 3$ galt)

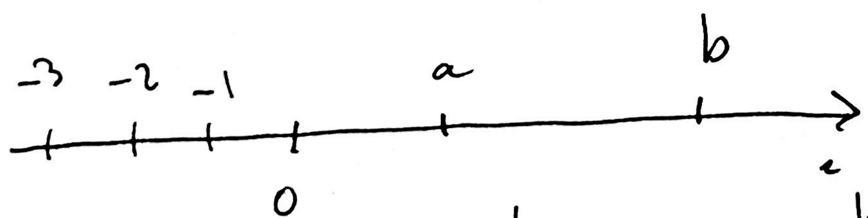
$2 < 3$ "mindre enn"

1. $a \leq b$ og $b \leq a \iff a = b$.

$b \geq a$ "større enn eller lik"

$b > a$ eller $b = a$.

Tilsvarende $\leq$.



$a < b$

totalt ordna

"b står til høyre for a"

For alle a, b : enten $a < b$, $b < a$ eller $a = b$

akkurat én av disse er sann.

$a < b \iff a + c < b + c$ for alle c.

$c = -a$: $a < b \iff 0 < b - a$

Ulikheter kan gjøres om til spørsmål om fortegn.

(2)

$a > 0$ $b > 0 \iff a \cdot b > 0$

$a < 0$ $b > 0 \iff a \cdot b < 0 \iff 0 > a \cdot b$

"Å gange med et negativt tall snur ulikheten."

$a > 0$ $c < d \iff a \cdot c < a \cdot d$

$(0 < d - c \iff 0 < a(d-c) \iff a \cdot c < ad)$

$a < 0$ $\quad c < d \iff a \cdot c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{snues}}}{>} a \cdot d \iff ad < ac$

$\Updownarrow$

$\left(0 < d - c \iff 0 > \underbrace{a(d-c)}_{a \cdot d - ac} \iff ac > ad \right)$

3

$2 < 3$ gange med 4 gir $8 < 12$

— -1 gir $-2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ulikheten snues}}}{>} -3$

$-2 < 5$ gange med -3

$6 > -15$

Ulikheter $2x < 6$ (påstand)

Løsningene er alle x som gjør påstanden sann.

$2x < 6 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2} > 0$

4 $\Leftrightarrow x < \frac{6}{2} \Leftrightarrow \underline{x < 3}$

Løsningene er alle x mindre enn 3.

$-2x < 6 \quad \Big| \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) < 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{-1}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow \underline{x > -3}$

Alternativt

$0 < 6 + 2x \quad \Big| \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 3 + x$

$\Leftrightarrow \underline{-3 < x} \quad (\Leftrightarrow x > -3)$

oppgaver

$$2x + 3 > -5$$

$$2x > \underbrace{-5-3}_{-8} \quad \cdot \frac{1}{2}$$

$$x > \frac{-8}{2} \iff \underline{x > -4}$$

$$-3x + 2 > 2x - 7$$

$$-3x - 2x > -7 - 2$$

$$-5x > -9 \quad \Big| \cdot \underbrace{\frac{-1}{5}}_{\frac{1}{-5}}$$

$$x < \frac{-9}{-5}$$

$$\underline{x < \frac{9}{5}}$$

5

$$-4x < 3 \quad \Big| \cdot -\frac{1}{4}$$

$$\underline{x > \frac{-3}{4}}$$

$$\frac{1}{x} > 2 \quad \Big| \cdot x$$

$x > 0$ $\quad 1 > 2x \iff \frac{1}{2} > x > 0$

$x = 0$ ikke mulig

$x < 0$ $\quad 1 < 2x \iff \frac{1}{2} < x$ ingen løsning

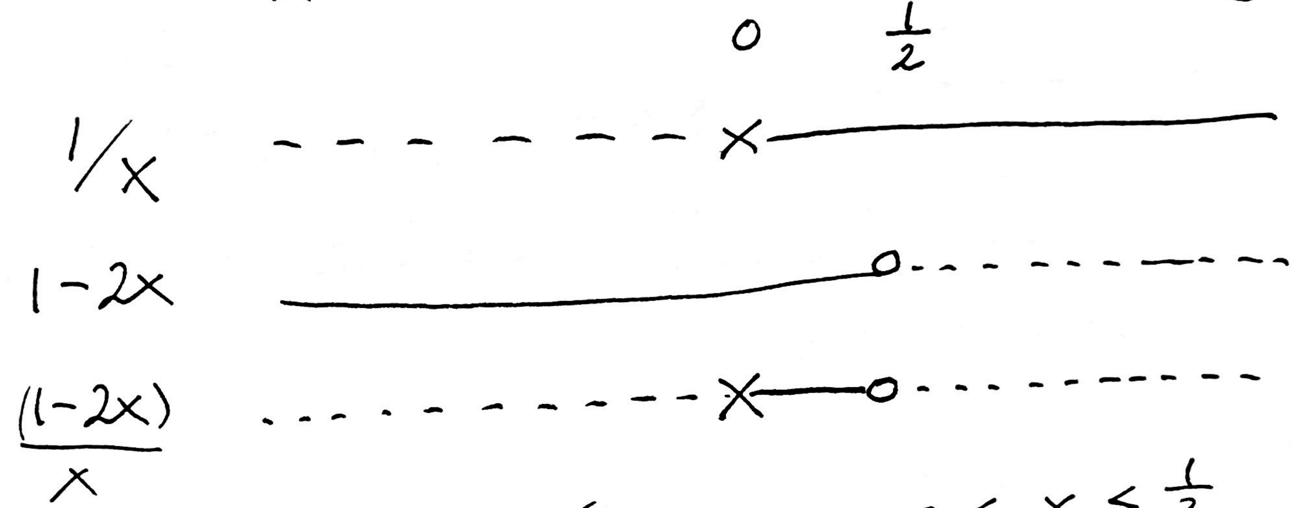
snur ulikheten siden $x < 0$

Løsningene er $\underline{0 < x < \frac{1}{2}}$.

Alternativt: $\frac{1}{x} > 2 \iff \frac{1}{x} - \frac{2 \cdot x}{x} > 0$

$\iff \frac{(1-2x)}{x} > 0$

Fortegnsskjema



(6)

Løsningsmengden er $\underline{0 < x < \frac{1}{2}}$

$3x \geq 7 \quad \Big| \cdot \frac{1}{3}$

$\underline{x \geq \frac{7}{3}}$

$-x-6 < x+2 \leq 5$

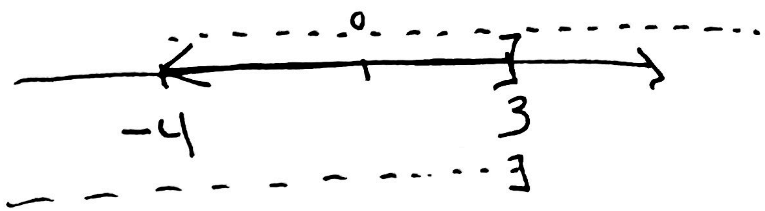
Løsningene er alle x slik at begge ulikhetene er oppfylt.

$\iff -x-6 < x+2$ og $x+2 \leq 5$ begge skal oppfylles

$-x-6 < x+2 \iff -6-2 < x-(-x)$

$-8 < 2x$

$-4 < x$



$x+2 \leq 5 \iff x \leq 3$

Både $-4 < x$ og $x \leq 3$

Alle x slik at $\underline{-4 < x \leq 3}$

(7)

$x \in \langle -4, 3]$

Intervaller på $\mathbb{R}$

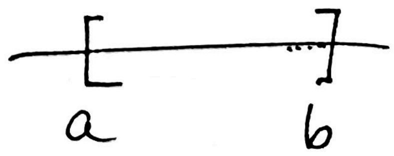
$\underline{\langle a, b\rangle} = (a, b)$ åpne intervaller

$a < x < b$

($\langle 3, 2\rangle$ tom mengde) $\langle 2, 3\rangle$ alle x $2 < x < 3$

Lukka intervaller $[a, b]$

$a \leq x \leq b$



Halv åpne intervaller

$[a, b\rangle$ $\quad a \leq x < b$

$\langle a, b]$ $\quad a < x \leq b$

$\langle a, \infty\rangle$ $\quad a < x$

$\langle a, \rightarrow\rangle$

$[a, \infty\rangle$ $\quad a \leq x$

8

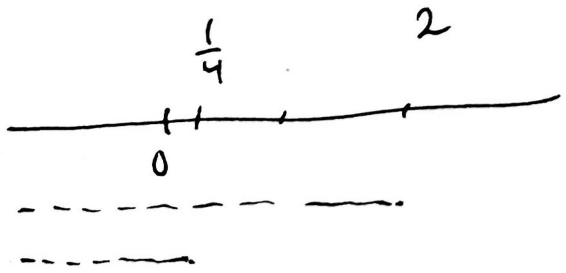
$\langle -\infty, b\rangle$

$\langle \leftarrow, b]$

$\mathbb{R} = \langle -\infty, \infty\rangle$

positive tall $\quad \langle 0, \infty\rangle$.

$$2x+1 < x+3 < -3x+4 \iff \begin{cases} 2x+1 < x+3 \iff \underline{x < 2} \\ x+3 < -3x+4 \iff 4x < 1 \\ \qquad \iff \underline{x < \frac{1}{4}} \end{cases}$$



Løsningene er $\underline{x < \frac{1}{4}}$

$\underline{x \in \langle -\infty, \frac{1}{4}\rangle}$

oppgave $8x + 2 < 3x + 5 < 6x - 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+2 < 3x+5 \\ 3x+5 < 6x-7 \end{cases}$$

$8x+2 < 3x+5 \Leftrightarrow \underset{8x-3x}{5x} < \underset{5-2}{3} \Leftrightarrow x < 3/5 \; (= 0.6)$

$3x+5 < 6x-7$: $\underset{5-(-7)}{12} < \underset{6x-3x}{3x} \Leftrightarrow 4 < x$

ingen felles x

Løsningsmengden er tom, $\emptyset$

(Det er ingen løsning (for x))

$4 < x < 3/5$

ingen løsning for x.

(9)

$$8x+2 < 6x-7$$
$$2x < -9$$
$$x < \frac{-9}{2}$$

Brukte geogebra til å illustrere

$a \cdot (f(x) + c) > (g(x) + c) \cdot a$

$p(x) < g(x) < f(x)$

$-5 < c < +5$

$-5 < a < 5$

$f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 6 - x$

$p(x) = x - 4$

(10)

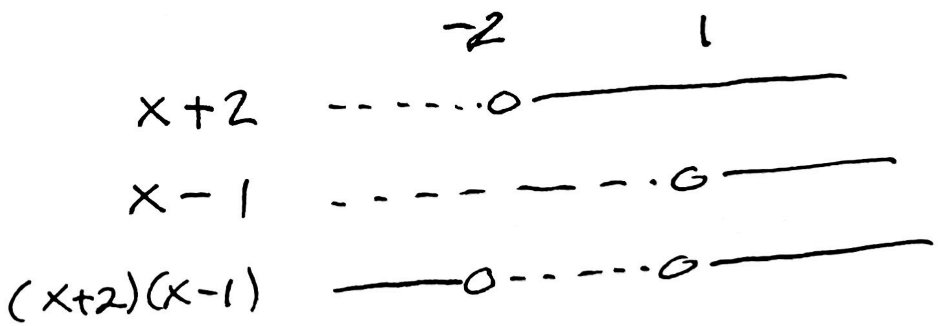
2-grads ulikhet

$x^2 + x - 2 > 0$

$(x+2)(x-1) > 0$

faktoriserer

Fortegnsskjema



Løsning alle x slik at $x < -2$ eller $x > 1$.

$$x \in \underline{\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle}$$

Øving

3.34 d antall dager

$A(d)$ pengemengden til Anne etter d dager

$E(d)$ —— Einar ——

$$A(d) = 1200 - 60 \cdot d$$
$$E(d) = 1000 - 40 \cdot d$$

$$E(d) > A(d)$$

(11)

$$1000 - 40d > 1200 - 60d$$
$$(60-40)d > 1200 - 1000$$
$$20d > 200 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{20}$$
$$\underline{d > 10}$$

Etter 10 dager vil Einar ha mest penger

3.45 b) $-1 < 1 - \frac{2}{3}x < \frac{5}{3}$

12

$-1 < 1 - \frac{2}{3}x \iff \frac{2}{3}x < 2 \;\Big|\cdot \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} \iff \underline{x < 3}$

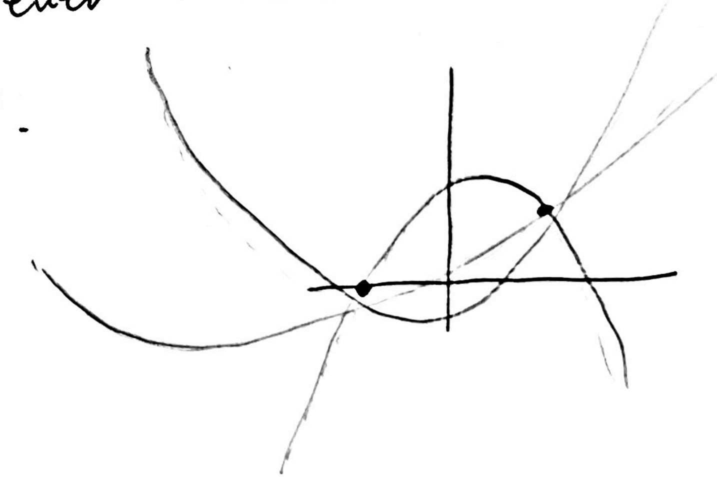
$1 - \frac{2}{3}x < \frac{5}{3} \iff \underbrace{1 - \frac{5}{3}}_{-2/3} < \frac{2}{3}x \;\Big|\cdot \frac{3}{2} \iff \underline{-1 < x}$

Løsningene er $\underline{-1 < x < 3}$

Alternativt: $\underline{x \in \langle -1, 3 \rangle}$

Vi ser mer på polynomer i kap 5.

Finn alle polynomer av grad 2 eller lavere som går gjennom $(-1, 0)$ og $(1, 1)$.



$p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

grad 2 polynom

13

$$p(-1) = a - b + c = 0$$
$$p(1) = a + b + c = 1$$

2 likninger
3 variabler.

Løse for a, b og c

$-L1 + L2$ gir $0 \cdot a + b - (-b) + 0 \cdot c = 1$

$$2b = 1$$

$b = \frac{1}{2}$.

$a - b + c = 0$ og $b = \frac{1}{2}$

$a + c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2} - a$

Én-parameter familie av løsninger.

a friparameter

$b = \frac{1}{2}$

$c = \frac{1}{2} - a$

Løsningene er $p(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - a\right)$

tegna opp i geogebra.

oppgave

(14)

$$3x - 2(x-1) > x+1$$
$$3x - 2x + 2 > x+1$$
$$x + 2 > x + 1$$ trekker fra x på begge sider (av ulikheten)
$$2 > 1$$
alltid sant.

($x \in \mathbb{R}$)

Løsningene er <u>alle x</u>.

3.118

Vib ← 150 km → Vik

$$V_{Vib} = \frac{150\,km}{3t} = 50\,km/t$$ starter kl 12^{00}

t tid i timer etter kl 13

$$V_{Vik} = \frac{150\,km}{5t} = 30\,km/t$$ starter kl 13^{00}

avstand fra Vibeke

$$Vib(t) = 50\,km + (50\,km/t)\cdot t$$
$$Vik(t) = 150\,km - (30\,km/t)\,t$$

— " —

$$Vib(t) = Vik(t)$$ <u>møtes</u>

$$50 + 50\cdot t = 150 - 30\cdot t$$

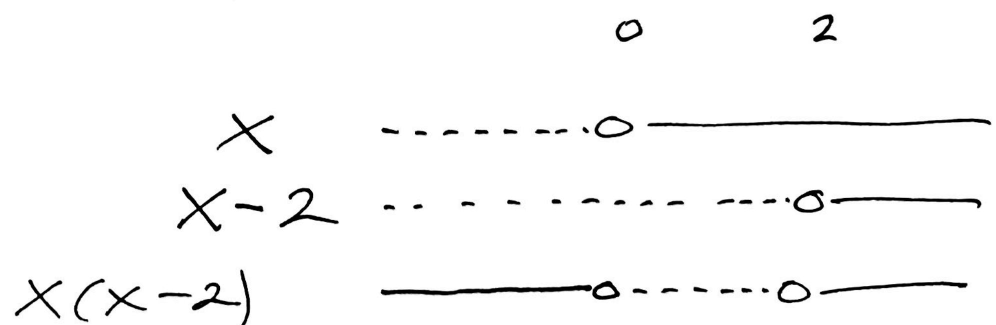
$$(50+30)t = 150-50$$
$$80t = 100$$
$$t = \frac{100}{80} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ time}$$

Avstanden til Vibeke når de møtes er

$$Vib\left(\frac{5}{4}\right) = 50\,\text{km} + \frac{50\,\text{km}}{t}\cdot\left(\frac{5}{4}t\right)$$
$$= \left(50 + 50\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\text{km}$$
$$= \left(50+50+50\cdot\frac{1}{4}\right)\text{km}$$
$$= \underline{112,5 \text{ km}}$$

15

$$x^2 + x > 3x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x-2) > 0$$



Løsningene er

$$\underline{x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle}$$