14sep 2021

5.3 Rest ved polynomdivisjon

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} = \underset{\text{polynom}}{S(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$q(x) = x-1$

$\deg r < \deg q = 1$

r tall.

$$\begin{array}{l} x^3 + 0 - 3x + 2 : x - 1 = \underline{x^2 + x - 2} \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad x^2 - 3x + 2 \\ \quad x^2 - x \\ \hline \quad\quad -2x + 2 \\ \quad\quad -2x + 2 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$0 \leftarrow$ resten er null

så $(x-1)$ deler $x^3 - 3x + 2$

og kvotienten er

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} = x^2 + x - 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x-1)$$

Resultat $\quad \dfrac{P(x)}{x - x_0} = S(x) + \dfrac{r}{x - x_0}, \quad r = P(x_0)$

$(x-x_0)$ deler $p(x)$ $\Longleftrightarrow$ $p(x_0) = 0$

$p(x) = x^3 - 3x + 2$

$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

Så $(x-1)$ deler $p(x)$

(behøver ikke utføre pol. div.)

2

$p(x) = S(x)(x-x_0) + r$

Så $\underline{p(x_0)} = S(x_0)\underbrace{(x_0-x_0)}_{0} + r = \underline{r}$

Oppg. Hva er resten i $\dfrac{x^7 - 2x^6 + 3x + 4}{x+1} = \dfrac{p(x)}{x-\underbrace{(-1)}_{x_0}}$

Resten er $p(\overset{-1}{\widetilde{x_0}}) = (-1)^7 - 2(-1)^6 + 3(-1) + 4$

$= -1 - 2 - 3 + 4 = \underline{-2}$

Hva er resten til: $\dfrac{x^5+5x^2+12}{x-2} = \dfrac{P(x)}{x-x_0}$ resten er $P(x_0)$

$x_0 = 2$ $= P(2)$

③ $P(2) = 2^5 + 5 \cdot 2^2 + 12 = 32 + 20 + 12 = \underline{64}$.

Hva er resten til $\dfrac{x^5+5x+12}{x+2} = \dfrac{x^5+5x+12}{x-(-2)}$

$P(-2) = (-2)^5 + 5(-2)^2 + 12 = -32 + 20 + 12$

$= 0$

Så $x+2$ deler $x^5+5x+12$.

Er $3x-3$ en faktor i $p(x) = x^3 - 2x + 1$?

$$3x-3 = 3(x-1)$$

$p(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ ingen rest.

Så $3x-3$ er en faktor i $x^3 - 2x + 1$.

Vi finner kvotienten:

$$x^3 - 2x + 1 : (x-1) = x^2 + x - 1$$

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 \\
\hline
x^2 - 2x + 1 \\
x^2 - x \\
\hline
-x + 1 \\
-x + 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{3(x-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^2 + x - 1)}}$$

oppg 5

For hvilke verdi a deler $x-2$ polynomet $p(x) = x^3 + ax^2 + 4$?

Resten er 0 $\Leftrightarrow$ $p(2) = 0$

$$2^3 + a \cdot 2^2 + 4 = 0$$

$$8 + 4a + 4 = 0$$

$$12 + 4a = 0$$

$$4a = -12 \quad | \cdot \tfrac{1}{4}$$

$$\underline{a = -3}$$

$(x-2)$ deler $p(x)$ hvis og bare hvis $\underline{a = -3}$.

5.4 Faktorisering.

Faktoriser $x^4 + 3x^2 + 2$ $\qquad U = x^2$

$$U^2 + 3U + 2 = (U+2)(U+1)$$

$$= \underline{(x^2+2)(x^2+1)}$$

6

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 8$$

"lete etter en rot (nullpunkt)".

$$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 8$$

$$= -8 + 16 - 8 = 0$$

Så $x - (-2) = x + 2$ deler $p(x)$.

Vi finner kvotienten $\dfrac{p(x)}{x+2}$

7

$$x^3 + 4x^2 + \quad + (-8) : x + 2 = \underline{x^2 + 2x - 4}$$

$$\begin{array}{l}
x^3 + 2x^2 \\
\hline
\quad 2x^2 + \quad + (-8) \\
\quad 2x^2 + 4x \\
\hline
\qquad -4x - 8 \\
\qquad -4x - 8 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Faktorisera

$$\begin{aligned}
& x^2 + 2x - 4 \\
&= (x+1)^2 - 1 - 4 = (x+1)^2 - (\sqrt{5})^2 \\
&= (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
x^3 + 4x - 8 &= (x+2)(x^2 + 2x - 4) \\
&= \underline{(x+2)(x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})}
\end{aligned}$$

Alle reelle polynomer faktoriseres som et produkt av polynomer av grad 1 og grad 2.

x^2+1 irredusibel (kan ikke faktoriseres mer)

8

$x^4+1 \geq 1$ så den har ingen lineære faktorer $(x-x_0)$

$$x^4+1 = \underbrace{(x^2+1)^2}_{x^4+1+2x^2} - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

benytter konjugatsetningen

$$x^4+1 = \underline{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)}$$

oppg $\quad q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1) Faktoriser $q(x)$. (Det finnes en liten heltallig løsning.)

2) Løs ulikheten $q(x) \geq 0$. $\quad q(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$

$q(0) = \cancel{6}$, $q(1) = -8$, $q(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$

så $x - (-1) = x + 1$ er en faktor i $q(x)$

(a)

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 : x+1 = \underline{x^2 + x - 6}$$

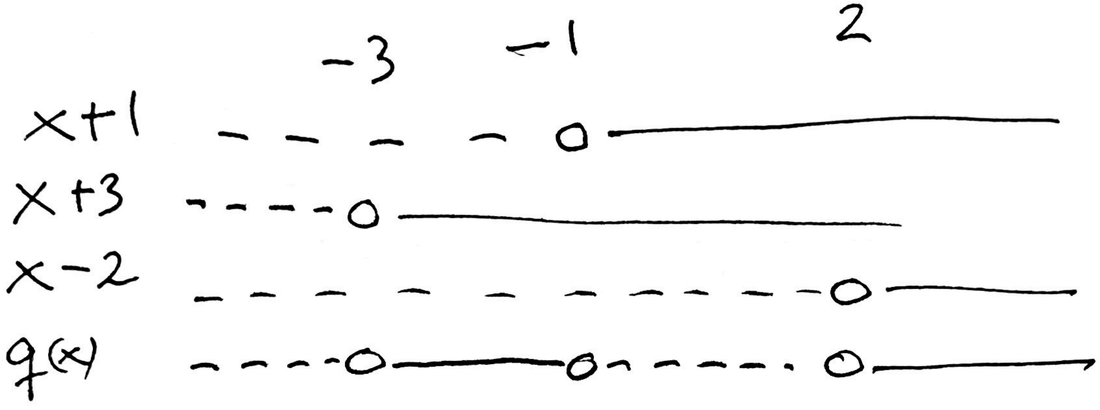
$$\begin{array}{l} x^3 + x^2 \\ \quad x^2 - 5x - 6 \\ \quad x^2 + x \\ \hline \quad -6x - 6 \end{array}$$

(−1, 2 røtter: Da må både $(x+1)$ og $(x-2)$ dele $q(x)$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 : x^2 - x - 2 =$)

$$q(x) = (x+1)(x^2 + x - 6) = \underline{(x+1)(x+3)(x-2)}$$

$$q(x) = (x+1)(x+3)(x-2) \geq 0$$



10

Løsningene til $q(x) \geq 0$

er $x \in \underline{[-3,-1] \cup [2,\infty)}$

5.5

Rasjonale uttrykk – Forkorting.

$$\frac{63}{14} = \frac{9 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{9}{2}.$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+1}{x+3} \quad (x \neq 2)$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$$

$$\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$$ vi ønsker å forkorte det rasjonale uttrykket.

$$= \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x+2}$$

(11)

Onsdag ser vi også på irrasjonale likninger 15.8.

Variant av 5.42. Øving

$p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

12

a) Vis at $x-1$ er en faktor i $p(x)$ $\Leftrightarrow p(1) = 0$

b) Faktorise $p(x)$.

a) $p(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 2 = 1 + 3 - 2 - 2 = 0$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 : x - 1 = x^2 - x + 2$$

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 \\ \hline \quad -x^2 + 3x - 2 \\ \quad -x^2 + x \\ \hline \qquad\quad 2x - 2 \\ \qquad\quad 2x - 2 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Røttene til $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$x^2 - x + 2$ irredusibel (over $\mathbb{R}$)

$p(x) = \underline{(x-1)(x^2 - x + 2)}$

(13)

$$x^3 - \frac{1}{8} : x - \frac{1}{2} = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{l}
x^3 - \frac{1}{2}x^2 \\
\hline
\frac{1}{2}x^2 \qquad -\frac{1}{8} \\
\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x \\
\hline
\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \\
\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \\
\hline
0
\end{array}$$

irredusibel

$$\underline{x^3 - \frac{1}{8} = (x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})}$$

Et monom er ax^n

$n \geq 0$.

polynom: summer av monomer

opg.

Forkort:

$$\frac{x^3+1}{x+1} \quad \text{og} \quad \frac{x^3+1}{x^2+7x+6}$$

$$= \frac{(x^3+x^2) - (x^2+x) + x+1}{x+1}$$

(eller pol.divisjon)

$$= \underline{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+6)}$$

$$= \underline{\frac{x^2-x+1}{x+6}}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

erstatt b med −b:

$$\left(a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1 = \left(\left(\frac{a}{b}\right) - 1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Kommer tilbake til slike identitete når vi studerer geometriske rekker

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

14

Forkort de rasjonale uttrykkene:

15

a) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+1}$

b) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+4}$

$$x^3-5x^2+3x+1 : x-1 = x^2-4x-1$$
$$\underline{x^3-x^2}$$
$$-4x^2+3x+1$$
$$\underline{-4x^2+4x}$$
$$-x+1$$

a) $\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x^2-4x-1)\ (x-1)}$

$= \dfrac{x-4}{x^2-4x-1}$

b) $(x-4)(x-1)$

Nevneren er 0 for $x=4$:

$4^3-5\cdot4^2+3\cdot4+4 = 64-80+12+4$

$= 4^2(4-5)+12+4 = -4^2+16=0$

så $(x-4)$ deler $q(x): x^3-5x^2+3x+4$

siden $q(4)=0$

16

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 4 : x - 4 = \underline{x^2 - x - 1}$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 4x^2 \\ \hline \quad -x^2 + 3x + 4 \\ \quad -x^2 + 4x \\ \hline \qquad -x + 4 \\ \qquad -x + 4 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x^2-x-1)} = \underline{\frac{x-1}{x^2-x-1}}$$

$(2x+2) = 2(x+1)$

like "gode" faktoriseringer

samme grad.