15.sep 2021

Polynomdivisjon, faktorisering + irrasjonale likninger

Deles $p(x) = x^3 - 2x - 4$ av $x - 2$?

Resultat: $p(x)$ deles av $x - x_0 \Leftrightarrow p(x_0)$, resten, er 0.

1. $p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

så $(x-2)$ deler $p(x)$.

Vi finner kvotienten:

$$
\begin{array}{l}
x^3 + \quad -2x - 4 : x - 2 = x^2 + 2x + 2 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad 2x^2 - 2x - 4 \\
\quad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad 2x - 4 \\
\qquad \underline{2x - 4} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{(x+1)^2+1}$$ Fullstendig faktorisering.

(2)

oppg. Løs ulikheten

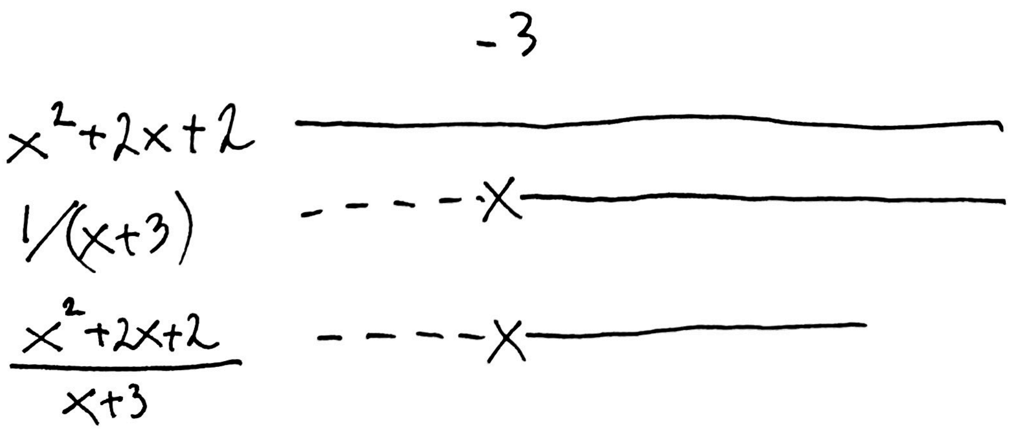
$$(*) \quad \frac{x^3-2x-4}{x^2+x-6} \geq 0$$

$$x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$$

$$\left(\begin{array}{ll} a+b=1 & 3-2=1 \\ a \cdot b = -6 & 3(-2)=-6 \end{array} \right)$$

$$\frac{x^3-2x-4}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{(x^2+2x+2)}{x+3} \qquad x \neq 2$$



Løsningen til ulikheten (*)

er

$\underline{x \in \langle -3, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle}$

oppg. For hvilke verdier av a kan $\frac{x^3+x+a}{x^2+2x-8}$ forkortes?

(tilsvarend 5.53 i boka)

3

$x^2+2x-8 =$

$= (x+1)^2-1-8 = (x+1)^2-3^2 = (x+1+3)(x+1-3) = \underline{(x+4)(x-2)}$

Hva må a være for at $q(x)=x^3+x+a$ lar seg dele av:

$x+4$? når $q(-4)=0$ $\quad (-4)^3-4+a=0, \quad a = 4+64 = \underline{\underline{68}}$

$x-2$? når $q(2)=0$ $\quad 2^3+2+a=0 \quad \underline{\underline{a=-10}}$

oppg. Løs ulikheten $\underbrace{x^3 - 7x - 6}_{p(x)} < 0$

4

$$p(3) = 3^3 - 7 \cdot 3 - 6 = 27 - 21 - 6 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 7(-2) - 6 = -8 + 14 - 6 = 0$$

$x - (-1) = x + 1$ er en faktor i $p(x)$

$$
\begin{array}{l}
x^3 + \quad - 7x - 6 : x + 1 = x^2 - x - 6 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\quad -x^2 - 7x - 6 \\
\quad \underline{-x^2 - x} \\
\qquad -6x - 6 \\
\qquad \underline{-6x - 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$= (x-3)(x+2)$$

(5)

$$p(x) = (x+1)(x+2)(x-3) < 0$$

	-2		-1		3	
$x+1$	- - -	- - -	0	———	———	———
$x+2$	- - -	0	———	———	———	———
$x-3$	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———
$p(x)$	- - -	0	———	0	- - -	0 ———

Så løsningene til $p(x) < 0$ er

$$\underline{x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 3\rangle}$$

5.8 <u>Irrasjonale likninger</u> $\sqrt{x} = 2 - x$

Ser at en løsning er $x = 1$.

Flytter over

$$x = (\sqrt{x})^2 = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x+r)(x+s) = x^2 + \underbrace{(r+s)}_{-5}x + \underbrace{rs}_{4}.$$

$$(x-4)(x-1)=0$$

To løsninger $\quad x=1 \qquad \sqrt{1}=2-1$ ✓

$\qquad\qquad\qquad x=4. \qquad \sqrt{4}=2 \neq -2=2-4$

6

Falsk løsning.

Løsningen er $\underline{x=1}$

$$a=b \overset{\text{impliserer}}{\Longrightarrow} a^2=b^2$$

$$a=-b \text{ eller } a=b \underset{\text{ekvivalens.}}{\Longleftrightarrow} a^2=b^2$$

Eks $\quad \sqrt{5-x}=1-x \quad \Rightarrow \quad 5-x=(1-x)^2=x^2-2x+1$

$$x^2-2x+1+(x-5)=0$$

$$x^2-x-4=0$$

7

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)^2-4=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4+\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\sim 2.56$$

$$x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\sim -1.56$$

Tester for falske løsningen

x_1: $\sqrt{5-x_1}\geq 0$, $1-x_1\sim -1{,}56$ Falsk løsning

x_2: $\sqrt{5+1.56}\sim 2{,}56 = 1+1{,}56$ begge er positive, så derfor like (siden kvadratene er like)

Løsningen er $\underline{x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}}\sim -1{,}56$

oppg. $\sqrt{8-x^2} = x \Rightarrow 8-x^2 = x^2 \Leftrightarrow 8 = 2x^2$

kvadrerer begge sider.

$4 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$ Tester for falske løsninger.

8

$x=-2$: $VS = 2$ $HS = -2$ Falsk løsning

$x=2$: $VS = 2$ $HS = 2$ ekte —

Løsningen er $\underline{x=2}$

Eks $1+\sqrt{x} = 2\sqrt{x-1}$ kvadrer begge side

$1+x+2\sqrt{x} = 4(x-1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4x-4-1-x$

$= 3x-5$

$\overset{\text{kvadrerer}}{\Rightarrow} 4x = (3x-5)^2$

9

$$4x = 9x^2 - 30x + 25$$ trekker fra $4x$ på begge sider.

$$9x^2 - 34x + 25 = 0$$

Ser at $x=1$ er en løsning.

$$(x-1)(9x-25) = 0$$

sjekker for falske løsninger

$x = 1$ $\quad VS = 2, \quad HS = 0$ Falsk.

$x = \frac{25}{9}$ $\quad VS = 1 + \sqrt{\frac{25}{9}} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

$HS = 2\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}} = 2\sqrt{\frac{16}{9}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ Like!

Løsningen er $\underline{x = \frac{25}{9}}$

oppgave (eksamen 2016) $\quad \sqrt{2x+1} + 1 = x.$