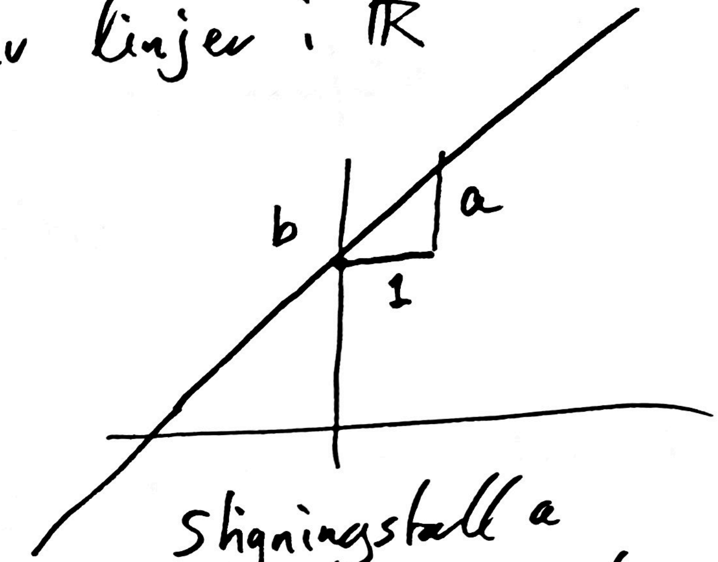
18.10
2021

13.1 Parametrisering av linjer i $\mathbb{R}^2$

Linjer i $\mathbb{R}^2$

$$y = ax + b$$

eller $x = c$
vertikale linjer

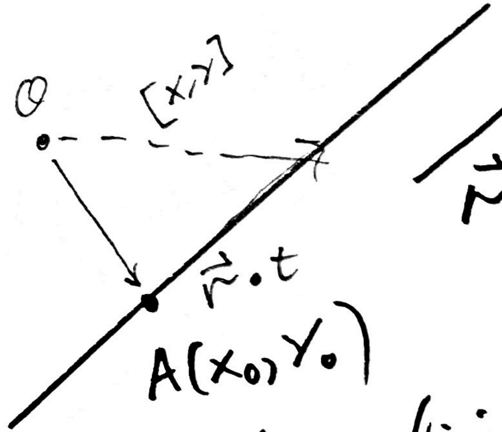


Stigningstall a
treffer den y-aksen i b.

$$\left.\begin{aligned} y &= at + b \\ x &= t \\[1em] y &= a(t - t_0) + b \\ x &= t - t_0 \end{aligned}\right\}$$
Parametriseringer av linjen

$$y = at^2 + b \qquad t \geq 0$$
$$x = t^2$$

parametriserer strålen til høyre for y-aksen.



$\vec{r} = [b, c]$ retningsvektor for linjen
parallell til linjen.

punkt på linjen

Bruker en retningsvektor $[b, c]$ og et punkt (x_0, y_0)
på linjen til å parametrisere den.

$y = y_0 + ct$

$x = x_0 + bt$

(Stigningstallet $a = \frac{c}{b}$ $b \neq 0$.)

Eks

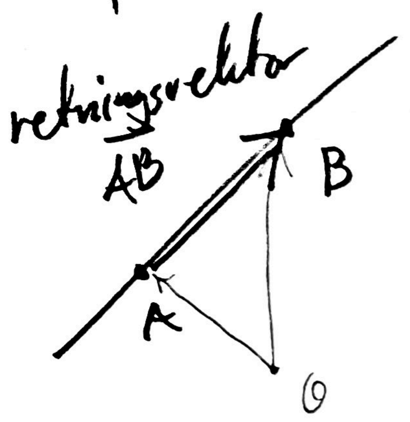
$P = (1, -2)$
punkt
på linjen

$\vec{r} = [2, -5]$
retningsvektor

Parametrisering

$x = 1 + 2t$
$y = -2 - 5t$

parametriser linjen gjennom $A(1,2)$ $B(-3,5)$



$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-3,5] - [1,2]$

$= [-4,3]$

$[x,y] = \vec{OA} + t\vec{AB}$

$[x,y] = [1,2] + t[-4,3]$

ekvivalent til $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = 2+3t. \end{cases}$

Hvor treffer linjen y-aksen? Det skjer når $x=0$.

$x = 1-4t = 0$

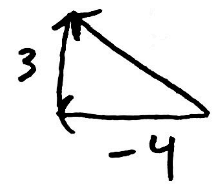
$1 = 4t \quad | \cdot \frac{1}{4}$

$\underline{t = \frac{1}{4}}$

Da er $y = 2+3\left(\frac{1}{4}\right) = 2+\frac{3}{4} = \underline{2.75}$

$= \underline{\frac{11}{4}}$

oppg. Beskriv linjen på formen grafen til $y = ax + b$.



$b = \frac{11}{4}$. Retningsvektoren e $[-4, 3]$

$a = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{11}{4}$$

En annen parametrisert linje er $L_2 \begin{cases} 2s + 1 = x \\ 5 - 3s = y \end{cases}$

Hvor møtes linjene?
(Hva er snittpunktet

Minner om $L_1 \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ samme x- og y-koordinater

$2s + 1 = x = 1 - 4t$

$5 - 3s = y = 2 + 3t$

$2s + 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s + 2t = 0$

$3 = 5 - 2 = 3t + 3s \qquad s + t = 1$

$s = -2t$ setter inn i 2. likning

$-2t + t = 1$

$-t = 1 \Leftrightarrow t = -1$

Da er $s = -2(-1) = 2$.

Snittpunktet er da $x = 1 - 4(-1) = 5$

$y = 2 + 3(-1) = -1$

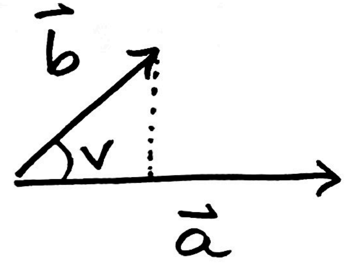
$\underline{\underline{(5, -1)}}$

13.2 Skalarprodukt

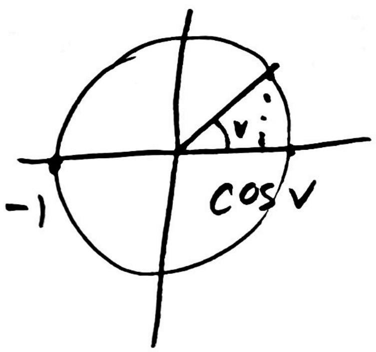
$$\vec{a} \bullet \vec{b} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(v)$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



$0 \leq v \leq 180$



eks. $|\vec{a}| = 2$. $|\vec{b}| = 3$

$v = 0^\circ$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{\cos(0^\circ)}_{1}$

$= 2 \cdot 3 = 6$

$v = 180^\circ$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cos(180^\circ) = -6$

$v = 45^\circ$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(45^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$v = 90^\circ$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(90^\circ) = 0$

Oppg. $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 3$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = 5$

Hva er da vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(v)$$

$$5 = 2 \cdot 3 \cdot \cos(v)$$

$$\cos(v) = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333\ldots$$

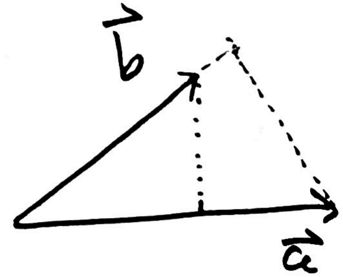
$$v = \arccos(0.8333..) = \cos^{-1}(0.8.333)$$

$$= \underline{33{,}56^\circ}$$

Egenskaper til skalarproduktet (prikk-produktet, indreproduktet)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ kommutativ.

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \iff \vec{a}, \vec{b}$ parallelle.

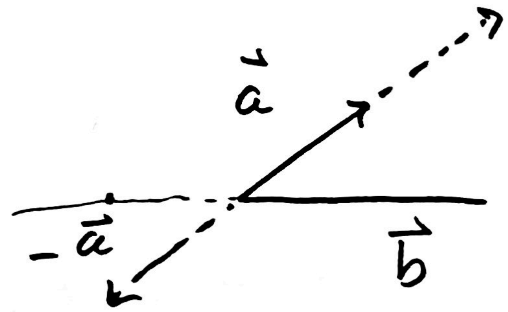
$\iff |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$

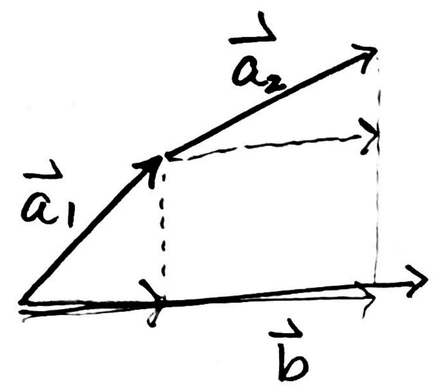
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff V = 90°$ vinkelrette eller $\vec{a}$ og/eller $\vec{b}$ er lik $\vec{0}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ er lineært i begge vektorene.

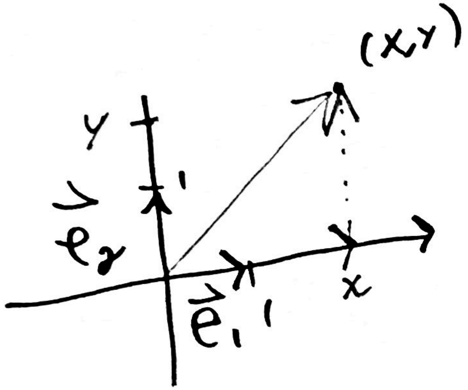
$(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$





13.3 Skalarprodukt og koordinater.



$\vec{e}_1 = [1,0]$

$\vec{e}_2 = [0,1]$

$[x,y] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$|\vec{e}_1| = 1$ så $\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = 1$

$|\vec{e}_2| = 1$ så $\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = 1$

$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0$ (vinkelrette)

$$\boxed{[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

$$(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2)\cdot(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$\overset{\text{lineært}}{=} x_1x_2\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}_{|\vec{e}_1|^2=1} + y_1x_2\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}_{0} + x_1y_2\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}_{0} + y_1y_2\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2}_{|\vec{e}_2|^2=1}$$

$$= x_1x_2 + y_1\cdot y_2.$$

$$[3,4]\cdot[-4,3] = 3(-4)+4\cdot 3 = 0$$

så $[3,4]$ og $[-4,3]$ er vinkelrette på hverandre.

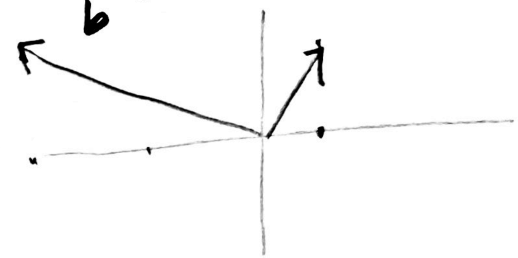
$\vec{a},\vec{b}$ er ortogonale : $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

oppg.

$$[7,5]\cdot[-7,10] = \overset{7(-7)}{-49} + \overset{(5\cdot 10)}{50} = 1$$

$$[3,5]\cdot[-1,2] = \underset{3(-1)+5\cdot 2}{-3+10} = 7$$

Finn vinkelen mellom $\vec{a} = [3, 4]$ og $\vec{b} = [-12, 5]$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(-12) + 4 \cdot 5$$
$$-36 + 20 = \underline{-16}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$$
$$= \sqrt{169} = 13$$

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos(v) = \frac{-16}{5 \cdot 13}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{-16}{5 \cdot 13}\right)$$
$$= \underline{104.25°}$$

oppg. Bestem s slik at $[2s, 3s+1]$ og $[2, -1]$ blir ortogonale.

$$[2s, 3s+1] \cdot [2, -1] = 0$$
$$4s - (3s+1) = 0$$
$$s - 1 = 0.$$

så $\underline{\underline{s = 1}}$

vektoren er da $\underline{[2, 4]}$

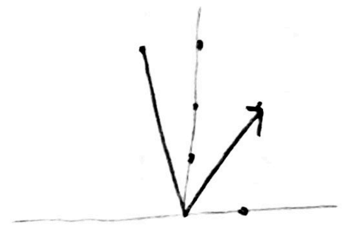
Øving

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Finn vinkelen mellom vektorene

$\vec{a} = [1, 2]$ og $\vec{b} = [-1, 3]$.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1(-1) + 2 \cdot 3 = -1 + 6 = 5$$

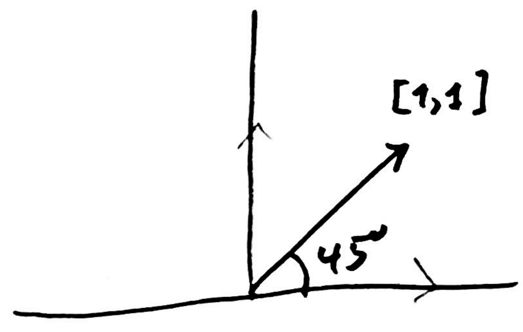
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \underline{1/\sqrt{2}}.$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{45^\circ}$$

$\vec{a} = [s+1, 2]$, $\vec{b} = [1, 1]$

bestem s slik at vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 45°.



$\vec{a}$ er aldri parallell til x-aksen

parallell til y-aksen $\Leftrightarrow s+1 = 0$

$s = -1.$

$\vec{a}_{(-1)} = [0, 2].$

Alternativ løsning hvor vi bruker skalarprodukt.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = s+1+2 = s+3.$

$|\vec{a}| = \sqrt{(s+1)^2 + 2^2} = \sqrt{s^2+2s+5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2}.$ $\quad \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{s^2+2s+5}$

$$\underset{\vec{a}\cdot\vec{b}}{s+3} = \underset{|\vec{a}|}{\sqrt{s^2+2s+5}}\ \underset{|\vec{b}|}{\sqrt{2}}\ \cos(45^\circ)$$

irrasjonal likning.

kvadrer begge sider

$$(s+3)^2 = s^2+2s+5$$

$$s^2+6s+9 = s^2+2s+5$$

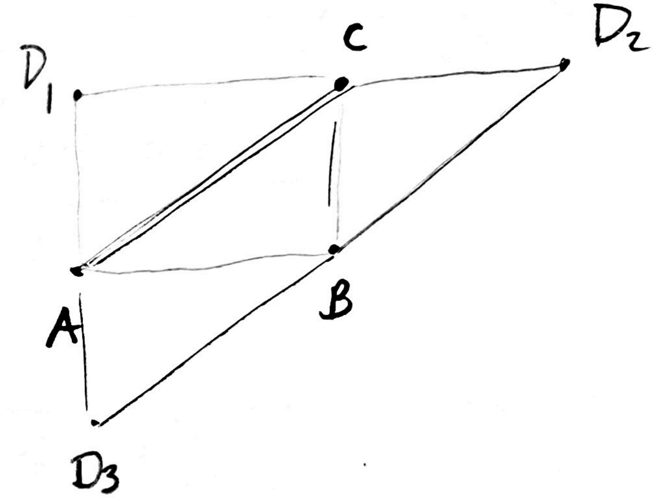
$$6s-2s = 5-9$$

$$4s = -4 \quad \text{så } s=-1$$

sjekker at $s=-1$ ikke er en falsk løsning.

$\vec{a}_s$ og $\vec{b}$ har vinkel 45° presis når $s=-1$.

Et parallellogram har hjørner $A(1,2)$, $B(3,4)$ og $C(4,6)$
Hva er mulige koordinater til det fjerde hjørnet?



$$\vec{AD_1} = \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$$
$$= [4,6] - [3.4] = [1,2]$$

$$\vec{OD_1} = \vec{OA} + [1,2] = [1,2] + [1,2]$$
$$= [2,4] \quad \text{så } \underline{D_1(2.4)}$$

$$\vec{OD_2} = \vec{OB} + \vec{BD_2} = \vec{OB} + \vec{AC} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OA}$$
$$= [3,4] + [4,6] - [1,2] = \underline{[6,8]}$$

$$\vec{OD_3} = \vec{OA} + \vec{AD_3} = \vec{OA} + \vec{CB} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$$
$$= [1,2] + [3,4] - [4.6] = [0,0] = O.$$

$|\vec{a}| = 13.9 \qquad |\vec{b}| = 6.8$

Er $\vec{a}\cdot\vec{b} = 100$ mulig?

$|\vec{a}||\vec{b}| \leq 14 \cdot 7 = 2\cdot 7\cdot 7 = 2\cdot 49 = 98 < \vec{a}\cdot\vec{b}$

ikkje mulig

(Føre til $\cos v > 1$ ...)

$|\vec{a}| = \sqrt{2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{2}\sqrt{3}$

Er $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\sqrt{3}$ mulig? Kva er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$?

$|\vec{a}||\vec{b}| = 2\sqrt{3} = -\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\cos(v) = -1 \qquad \underline{v = 180^\circ}$