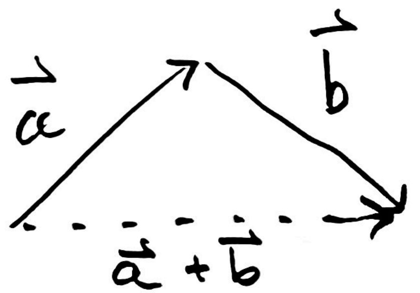
Kap 14 Vektorer i rommet

25.10
2021

man. tirsd. 14.1 - 14.4

onsdag 14.5 Vektorprodukt.

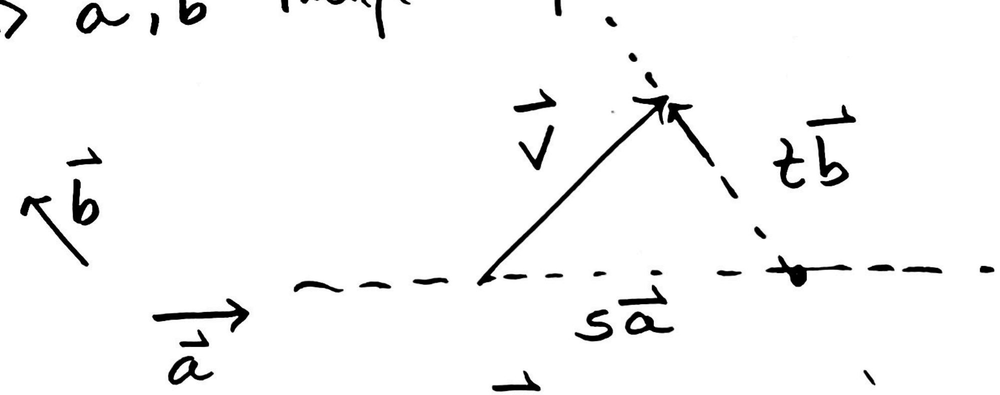
1



I planet

Basis: $\vec{a}, \vec{b}$ utspenner hele planet

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ ikkje er parallelle



$\vec{v} = s\vec{a} + t\vec{b}$

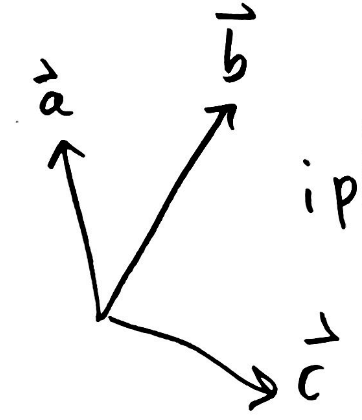
s, t entydige

$\vec{0} = s\vec{a} + t\vec{b} \Rightarrow s, t = 0$

I rommet

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lineær kombinasjon $\vec{v} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er ikke parallelle men de er lineært avhengige

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er lineært uavhengige hvis:

$$s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c} = \vec{0}$$

fører til at $s_1 = s_2 = s_3 = 0$

Resultat Hvis $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er lineært uavhengige.

Da er enhver vektor i rommet en lineær kombinasjon av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$.

$$\vec{v} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$$

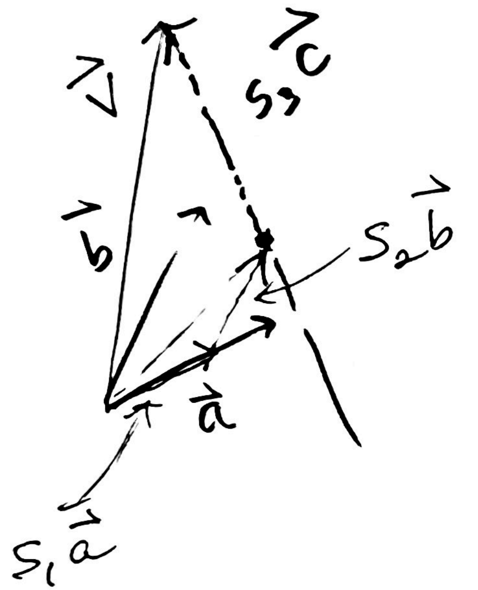
s_1, s_2 og s_3 er entydig bestemt av $\vec{v}$.

må være 0 siden $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er lin. uavh.

$t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} = V = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$,

$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c}$

(3)



$\vec{c}\uparrow$ (ut av planet)

$$\vec{v} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}.$$

Eks. er $\vec{v}=[0,1,1]$ en linear kombinasjon av $\vec{a}=[1,-2,3]$ og $\vec{b}=[5,2,2]$.

$$\begin{aligned}[0,1,1] &= s\vec{a} + t\vec{b} \\ &= [s, -2s, 3s] + [5t, 2t, 2t] \\ &= [\underbrace{s+5t}_{0}, \underbrace{-2s+2t}_{1}, \underbrace{3s+2t}_{1}]\end{aligned}$$

$s = -5t$

x-komp. $-2s + 2t = -2(-5t) + 2t = 12t = 1 \quad (t = 1/12)$

y-komp. $3s + 2t = 3(-5t) + 2t = -13t = 1 \quad (t = -1/13)$

z-komp.

$25t = 1 - 1 = 0$

$t = 0$ ingen løsning.

(4)

$\vec{V}$ er ikke en lin. komb. av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

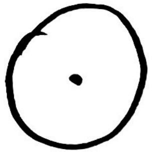
Oppg.

$\vec{a} = [1,2,3]$, $\vec{b} = [3,2,1]$

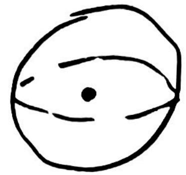
Er $\vec{V} = [3,3,3]$ en lin komb. av $\vec{a}$ og $\vec{b}$? Ja.

$\vec{a} + \vec{b} = [4,4,4]$. Så $[3,3,3] = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$



$\mathbb{R}^2$



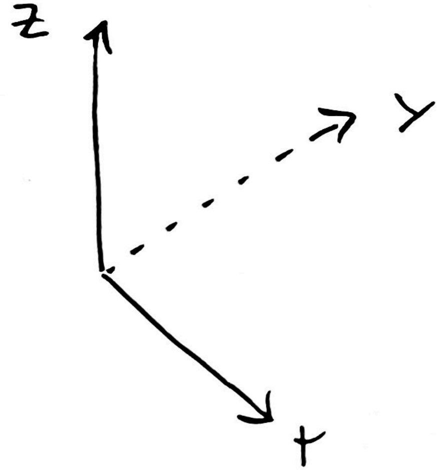
$\mathbb{R}^3$

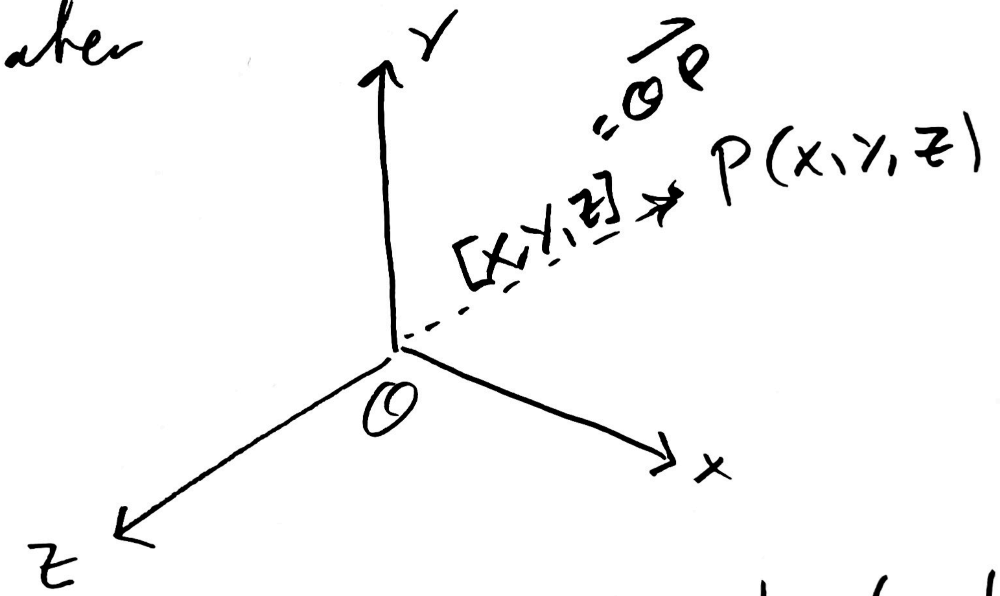
?

$\mathbb{R}^4$ (Sjekk "Flatland")

⑤

14.2 Vektorkoordinater





x, y og z utgjør et høyrehandsystem.

Basis: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorer av lengde 1 langs koordinataksene

$\vec{e}_1 = [1,0,0]$

$\vec{e}_2 = [0,1,0]$ kalles også: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$\vec{e}_3 = [0,0,1]$

6

$$[x,y,z] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Addisjon og skalarmultiplikasjon er gitt elementvis

oppg. Vis at $[2,4,18]$ og $[3,6,27]$ er parallelle.

$$\underline{\tfrac{3}{2}[2,4,18]} = 3[1,2,9] = \underline{[3,6,27]}$$

vektorene er parallelle.

A, B punkt i rommet $\qquad \vec{AB}$ "vektoren fra A til B"

$A(1,2,5) \qquad B(-3,1,-1)$.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-3,1,-1] - [1,2,5]$$
$$= [-3-1,\ 1-2,\ -1-5]$$
$$= [-4,-1,-6]$$

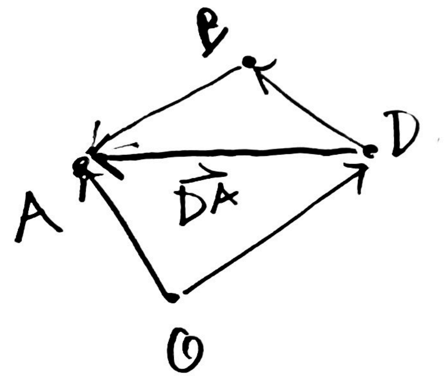
⑦

$$\vec{AB} = \underline{-[4,1,6]}$$

oppg A, B som ovenfor.
Finn D slik at

$$\underbrace{\underbrace{-\vec{AB} + \vec{DB}}_{\vec{BA} + \vec{DB}}}_{\vec{DA}} = [3,-3,4].$$

$$\vec{DA} = [3,-3,4].$$



$$\vec{OA} - \vec{OD} = [3,-3,4]$$
$$\vec{OA} - [3,-3,4] = \vec{OD}$$
$$\vec{OD} = [1,2,5] - [3,-3,4] = \underline{[-2,5,1]}$$

Eksempel $\vec{v} = [1,-2,3]$

8

Finnes det en skalar t slik at

$$\vec{u}_t = [1,1,-1] + t[3,5,1]$$

og $\vec{v}$ blir parallelle?

$$s\vec{v} + u_t = \vec{0}$$

$$s\vec{v} + [1,1,-1] + t[3,5,1] = \vec{0}$$

$$s[1,-2,3] + t[3,5,1] = -[1,1,-1] = [-1,-1,1]$$

2 variable
3 likning.

$$\begin{array}{ll} L1 & s + 3t = -1 \\ L2 & -2s + 5t = -1 \\ L3 & 3s + t = 1 \end{array}$$

$2L1 + L2$: $\quad 0 \cdot s + 2 \cdot 3t + 5t = -1 \cdot 3$

$$11t = -3$$

$$\underline{t = \frac{-3}{11}}$$

$-3L1 + L3 \qquad 0 \cdot s \quad -3 \cdot 3t + t = -3(-1) + 1$

$$-8t = 4$$

$$t = \underline{\frac{-1}{2}}$$

(9) Likningssystemet har ingen løsning.

For alle t er u_t ikkje-parallell til $\vec{v}$.

oppg. Finn en t slik at u_t blir parallell til $[1,2,1]$

$s[1,2,1] = u_t = [1,1,-1] + t[3,5,1]$

$s[1,2,1] - t[3,5,1] = [1,1,-1]$

$L1: \; s - 3t = 1 \qquad L3: \; s - t = -1$

$L2: \; 2s - 5t = 1 \qquad s = -1 + t$

setter $s = -1+t$ i L1 og L2

$-1 + t - 3t = 1$: $-2t = 2$ gir $t = -$

$2(-1+t) - 5t = 1$: $-3t = 3$ gir $t = -$

(10)

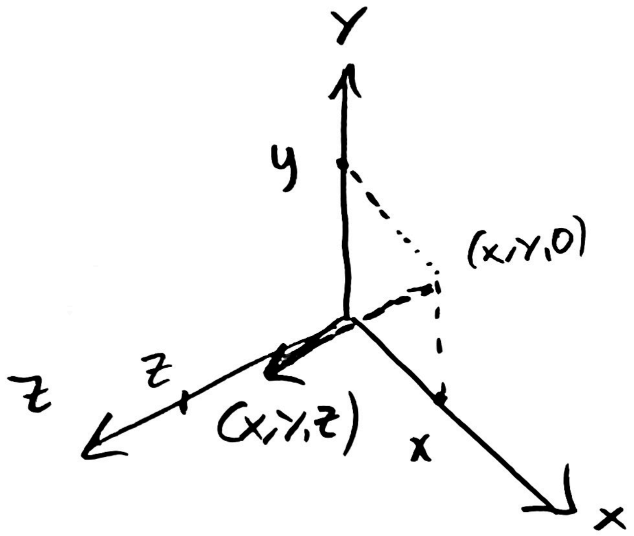
Løsning $t = -1$, $s = -1 + t = \underline{-2}$.

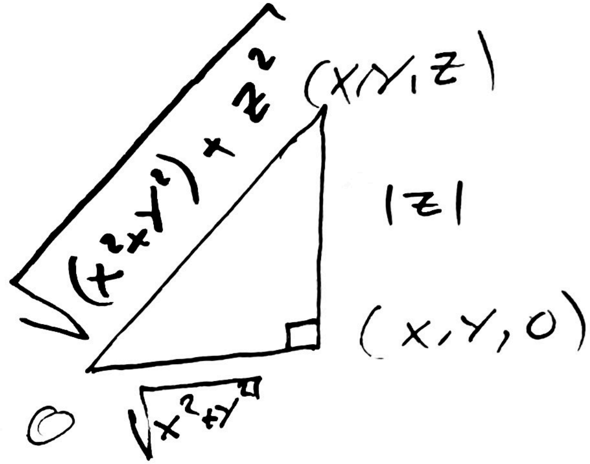
$2[1,2,1] = u_{-1}$

Ja $t = -1$ gir u_{-1} er parallell til $[1,2,1]$

14.3 Norm $|[x,y,z]| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ avstanden fra O til (x,y,z)

(11)





$$\left\| [-2, 2, -1] \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1}$$

$$= 3$$

12

oppg. $A(1,2,-3)$ $B(2,2,2)$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [2,2,2] - [1,2,-3]$

$= \underline{[1,0,5]}$

$A \xrightarrow{\vec{AC}} C$

Finn C.

$\vec{AC} = [1,-1,2]$.

$= \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$

$= [1,2,-3] + [1,-1,2]$

$= \underline{[2,1,-1]}$

$\vec{AB} + 2\vec{DB} = \vec{AC}$

Finn D.

$B(2,2,2)$

13

$$2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$= [1,-1,2] - [1;0,5]$$
$$= [0,-1,-3]$$

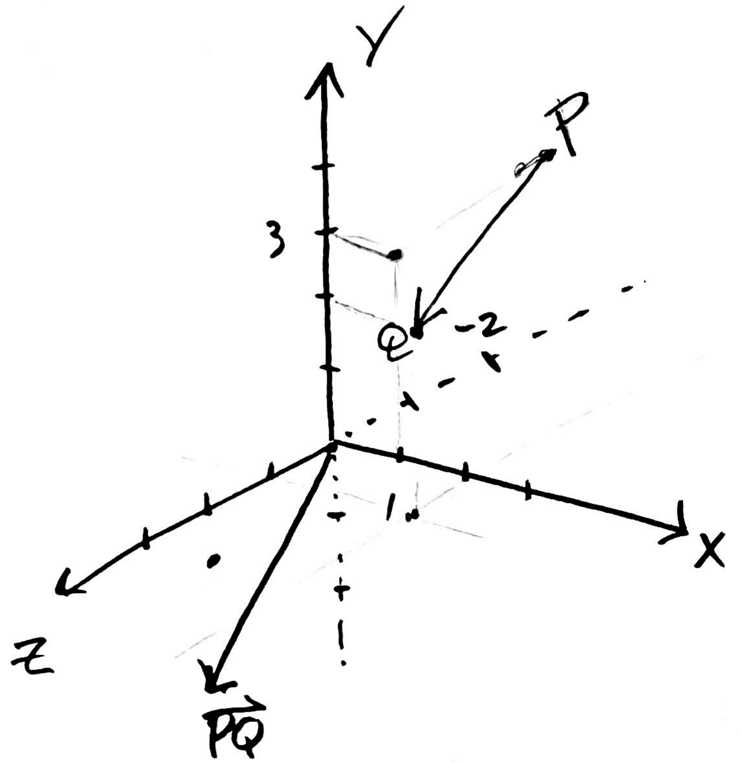
$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}[0,-1,-3] = [0, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}]$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - [0, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}] = [2,2,2] + [0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$
$$= [2, 2.5, 3.5]$$
$$= \underline{[2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}]}$$

$$\overrightarrow{OD} = \underline{\frac{1}{2}[4,5,7]}$$

Så $\underline{D(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})}$

14



$P(1, 3, -2)$

$Q(2, 1, +1)$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = [2, 1, 1] - [1, 3, -2] = \underline{[1, -2, 3]}$$

Finn lengden $|\vec{PQ}|$ til $\vec{PQ}$.

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \underline{\sqrt{14}} \sim \underline{3.74}$$

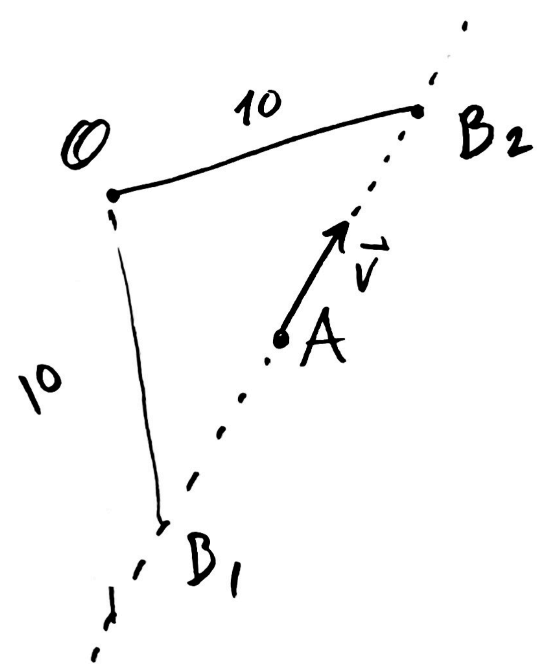
$$2[1, 2, 3] + 3[1, -1, -2] = [2+3, 4-3, 6-6] = \underline{[5, 1, 0]}$$

Litt vanskelig opg:

(15)

Finn punkt B slik at $\overrightarrow{AB}$ er parallell til $\vec{v} = [1,-2,4]$ og $|\overrightarrow{OB}| = 10$.

$A(1,-1,1)$



$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + t[1,-2,4]$.

$= [1,-1,1] + t[1,-2,4]$

$|\overrightarrow{OB}| = 10$

$|[1,-1,1] + t[1,-2,4]| = 10.$

$|[1+t, -1-2t, 1+4t]|^2 = 10^2 = 100$

$(1+t)^2 + (1+2t)^2 + (1+4t)^2 = 100$

$1+2t+t^2 + 1+4t+4t^2 + 1+8t+16t^2 = 100$

16

$$21t^2 + 14t + 3 = 100$$

$$21t^2 + 14t - 97 = 0$$

Løser for å finne t ...

$$t_1 = 1.8415 \quad \text{og} \quad t_2 = -2.5082$$

Siden $\vec{OB} = \vec{OA} + t[1, -2.4]$ gir dette

$$B_1(-1.508, 4.016, -9.033)$$

og $B_2(2.841, -4.683, 8.366)$