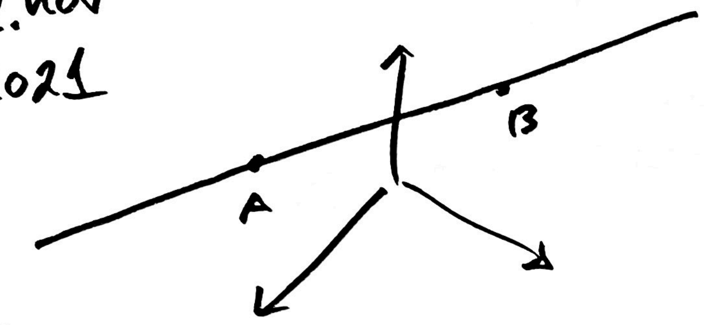
2.nov 2021

14.8 Linjer i rommet



$\vec{r}$ vektor parallell til linjen kalles <u>retningsvektor</u>

(1)

$\overrightarrow{AB}$ er en retningsvektor.

$P(x, y, z)$

Parametrisering av linjen.

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{r}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{r}$$

$$[x, y, z] = \overrightarrow{OA} + t\vec{r}$$

Parametriser linjen gjennom

$A(-1,2,-3)$ og $B(4,6,0)$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [4,6,0] - [-1,2,-3]$$
$$= [5,4,3] \text{ er en retningsvektor}$$

(2)

$$\underbrace{[x,y,z]}_{\vec{OP}} = \underbrace{[-1,2,-3]}_{\vec{OA}} + t\underbrace{[5,4,3]}_{\vec{AB}}$$

$$x = -1 + 5t$$
$$y = 2 + 4t$$
$$z = -3 + 3t.$$

$A(1,1,2)$ $\quad$ $B(-1,0,2)$

Oppg.

1) Parametriser linjen gjennom A og B.

2) Ligger $Q(3,4,0)$ på linjen?

1) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-1,0,2] - [1,1,2]$

$= [-2,-1,0]$

③ $[x,y,z] = \vec{OA} + t\vec{AB}$

$= \underline{[1,1,2] + t[-2,-1,0]}$

2) Q ligger ikkje på linjen

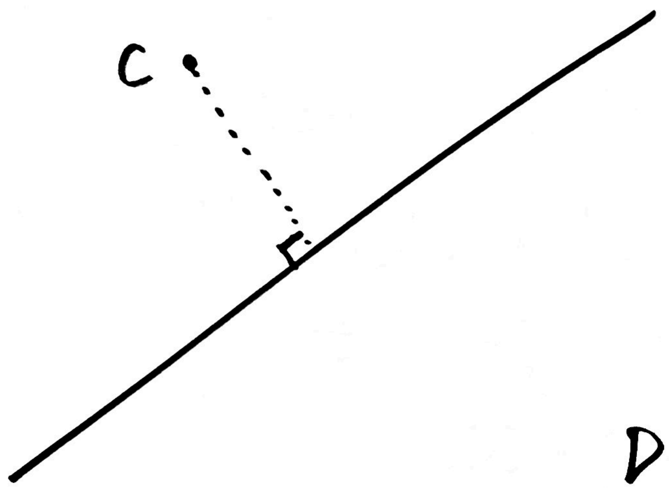
$[3,4,0] = [1,1,2] + t[-2,-1,0]$

har ingen løsning

z-komponent $\quad 0 \neq 2 + t \cdot 0 \quad$ alle t.

avstanden mellom Q og punkt på linjen

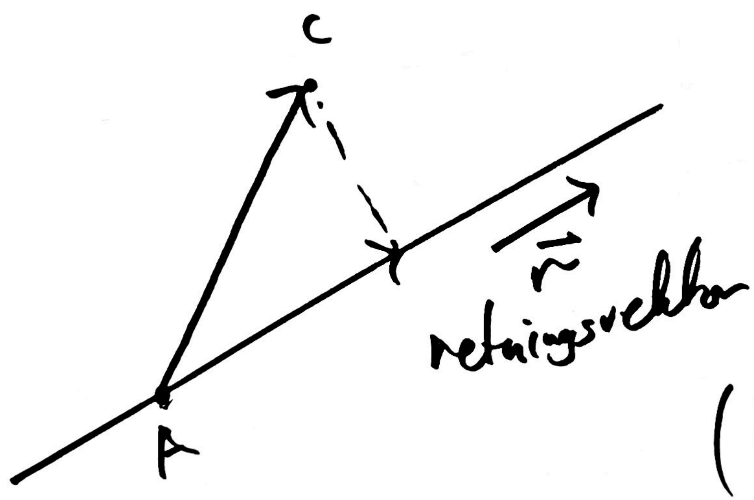
er minst lik 2.



Avstand mellom punkt og linje er minste avstand mellom punktet og alle mulige punkt på linjen.

Det realiseres ved punktet vi får ved å gå vinkelrett ned på linjen.

4



parallell til linje

$$\vec{AC}_{\parallel} = \frac{\vec{AC} \bullet \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r}$$

$$\vec{AC}_{\perp} = \vec{AC} - \vec{AC}_{\parallel}$$

(Korteste) avstand mellom linjen og C er $\underline{|\vec{AC}_{\perp}|}$

Finn korteste avstand mellom punktet $C(3,4,0)$ og linjen gjennom $A(1,1,2)$ med retningsvektor $\vec{r} = [2,1,0]$.

5

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [3,4,0] - [1,1,2] = [2,3,-2]$$

$$\vec{AC}_{\parallel} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}\vec{r} = \frac{[2,3,-2] \cdot [2,1,0]}{|[2,1,0]|^2}\vec{r}$$

$$= \frac{4+3+0}{5}\vec{r} = \frac{7}{5}[2,1,0].$$

$$\vec{AC}_{\perp} = \vec{AC} - \vec{AC}_{\parallel} = [2,3,-2] - \frac{7}{5}[2,1,0]$$

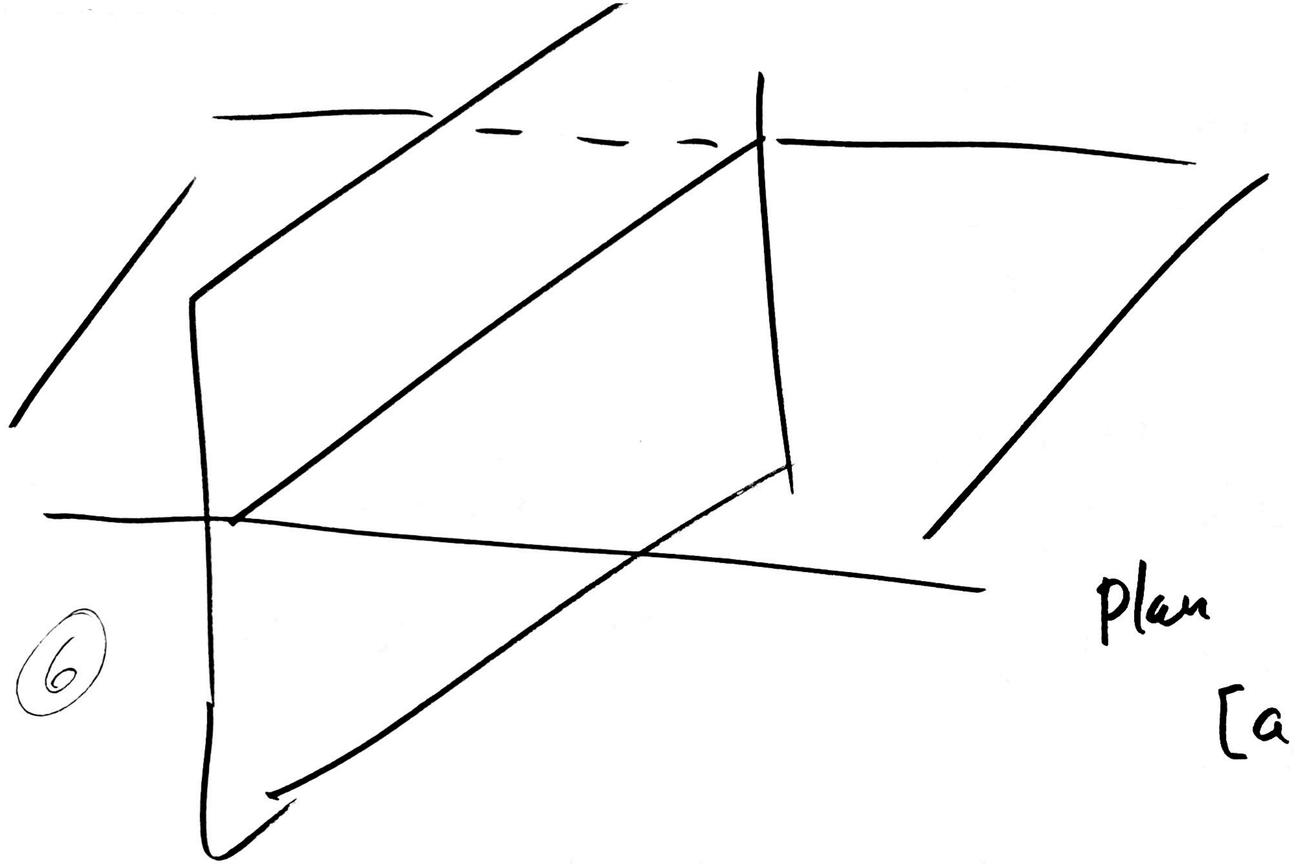
$$= \left[2 - \frac{7}{5}\cdot 2,\ 3 - \frac{7}{5},\ -2\right] = \underline{\left[\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}, -2\right]}.$$

Avstanden mellom C og linjen

$$|\vec{AC}_{\perp}| = \left|\frac{1}{5}[-4, 8, -10]\right| = \left|\frac{2}{5}[-2,4,-5]\right|$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{4+16+25} = \frac{2}{5}\sqrt{45} \approx \underline{2.683}$$

6



linje som snittet av to plan.

plan $ax+by+cz=d$

$[a,b,c]$ normalvektor til planet.

$d = ax_0+by_0+cz_0$

(x_0, y_0, z_0) punkt i planet.

Beskriv linjen

$[x,y,z]=[1,1,2]+t[2,1,0]$

som et snitt av to plan.

Vi finner to ikke-parallelle plan som inneholder $A(1,1,2)$.

$\vec{r} = [2,1,0]$ $\quad$ $\vec{n}_1 = [0,0,1]$

$\vec{n}_2 = [1,-2,0]$

7

$z = d_1$

$x - 2y = d_2$

setter inn koordinater til $A(1,1,2)$

gir $d_1 = 2$

$d_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

Linjen er snittet av plana

$$\underline{z = 2 \quad \text{og} \quad x - 2y = -1}$$

Eksempel: Finn linjen som er snitte av plana

$x + y - z = 1$ og

$2x + 3y + z = 6$

1) Må finne et punkt A som ligger på linjen
(altså i begge plana)

2) Må finne en retningsvektor $\vec{r}$ til linjen.
(8) $\vec{r}$ er ortogonal til normalvektorene til begge plana.

---

1) Prøver med $y=0$:

$$\left.\begin{aligned} x - z &= 1 \\ 2x + z &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3x &= 1+6 = 7 \\ x &= \frac{7}{3} \\ z &= x-1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$(\frac{7}{3}, 0, \frac{4}{3})$ er på linjen

det er også $(1,1,1)$.

2) Normalvektorer til plana er $[1,1,-1]$
$[2,3,1]$

Kryssproduktet deres er en retningsvektor til linjen.

9

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

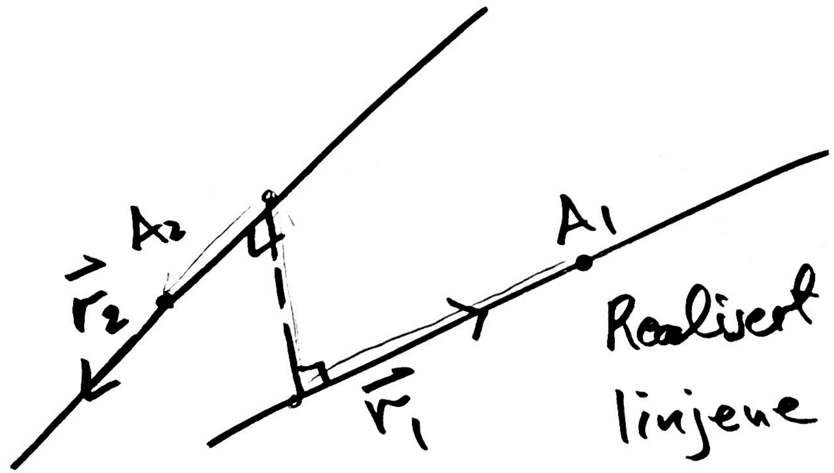
$$= 4\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k} = [4, -3, 1]$$

retningsvektor: $\vec{r} = [4, -3, 1]$

A på linja $A(1,1,1)$

En Parametrisering

$$[x, y, z] = \underbrace{[1, 1, 1]}_{\vec{OA}} + z\,\underbrace{[4, -3, 1]}_{\vec{r}}$$



Korteste avstand mellom to linjer.

Realisert av et linjestykke mellom linjene som står vinkelrett på begge linjene.

$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ står vinkelrett på begge linjene.

Kan sette opp et 3×3 likningsystem.

10

$$\overrightarrow{A_1A_2} = s\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 + u \cdot \vec{n}$$

$$u\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2}_{\perp \text{plan}}$$ (vinkelrett på planet = parallell til $\vec{n}$)

$$= \overrightarrow{A_1A_2}_{\parallel \vec{n}}$$

$$u\vec{n} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Korteste avstand mellom linjene er

$$|u\vec{n}| = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}| = \underline{\frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

(11)

Finn korteste avstand mellom linjene

L1 $[x,y,z] = [1,-1,0] + s[1,1,2]$

L2 $[x,y,z] = [2,0,-2] + t[-1,2,1]$

$A_1(1,-1,0)$ $\quad \vec{r_1} = [1,1,2]$

$A_2(2,0,-2)$ $\quad \vec{r_2} = [-1,2,1]$

korteste avstand $\dfrac{|\vec{A_1A_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ hvor $\vec{n}$ er normal til begge linjene.

$$\vec{A_1A_2} = \vec{OA_2} - \vec{OA_1} = [2,0,-2] - [1,-1,0] = [1,1,-2].$$

$$\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

(12)

$\vec{n} = [-3, -3, 3] = -3[1, 1, -1]$

velger normalvektoren $\vec{n}_1 = [1, 1, -1]$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$

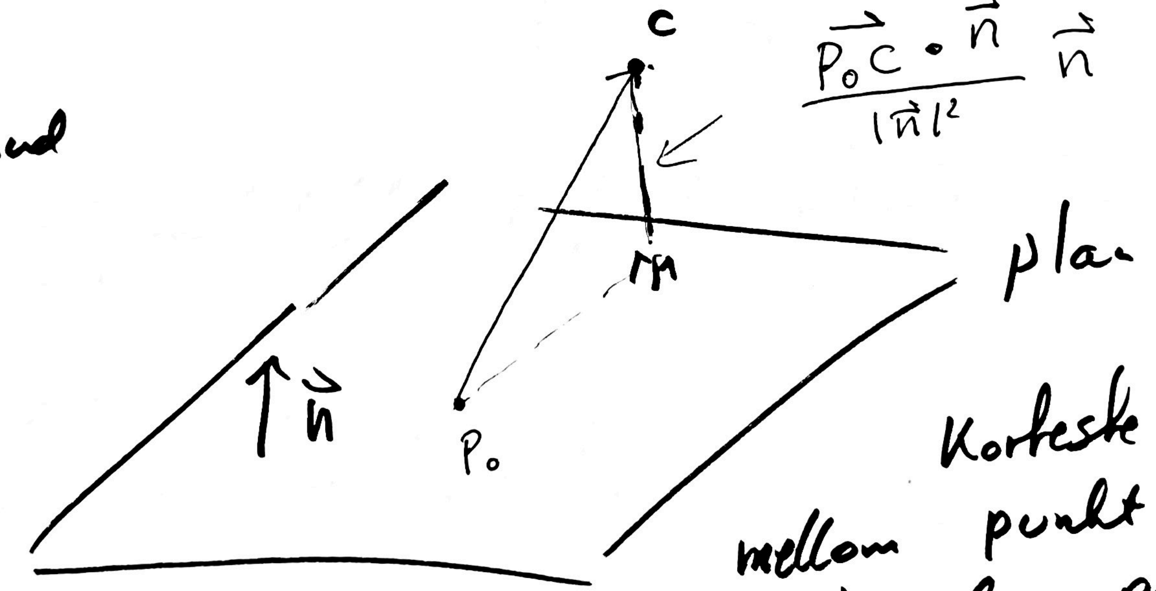
Avstand: $\left| \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left| [1, 1, -2] \cdot [1, 1, -1] \right|$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 + 1 + 2 \right| = \underline{\underline{\dfrac{4}{\sqrt{3}}}}$

Korteste avstand

$\dfrac{|\overrightarrow{P_0C} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$\dfrac{\overrightarrow{P_0C} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$



Korteste avstand mellom punkt C og planet er lengden på linjestykke fra C vinkelrett ned på planet.

ØVING

Parametriser linjen som er snittet av plana:

13

$x+y+z = 2$ normalvektor $[1,1,1]$

$2x-y+4z = 0$ $[2,-1,4]$.

$$[1,1,1]\times[2,-1,4] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] = [5, -2, -3]$$

$\vec{r} = [5,-2,-3]$.

Finner et punkt på linjen.

$z=0$: $x+y=2$, $2x-y=0$

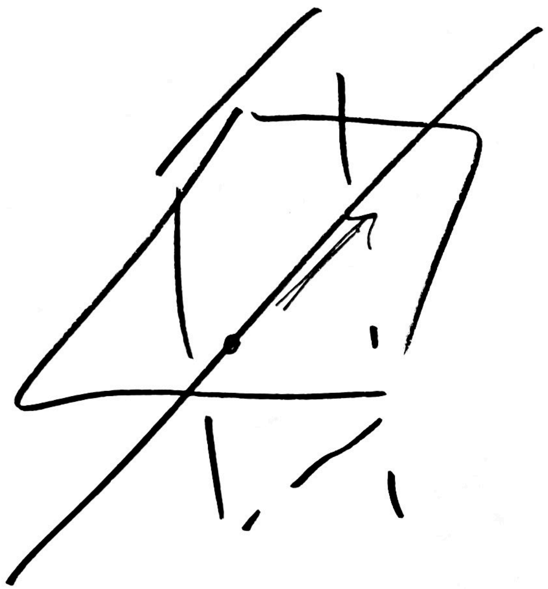
$y=2x$, $3x=2$.

$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$

En parametrisering av linjen er

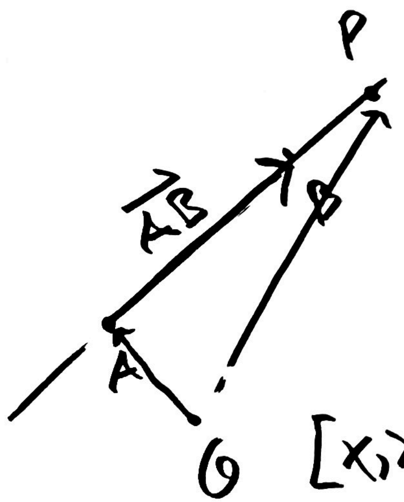
$$[x,y,z] = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right] + t[5,-2,-3]$$

14



Parametriser linjen gjennom

$A(-1,0,2)$ og $B(1,2,-1)$.



$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$.

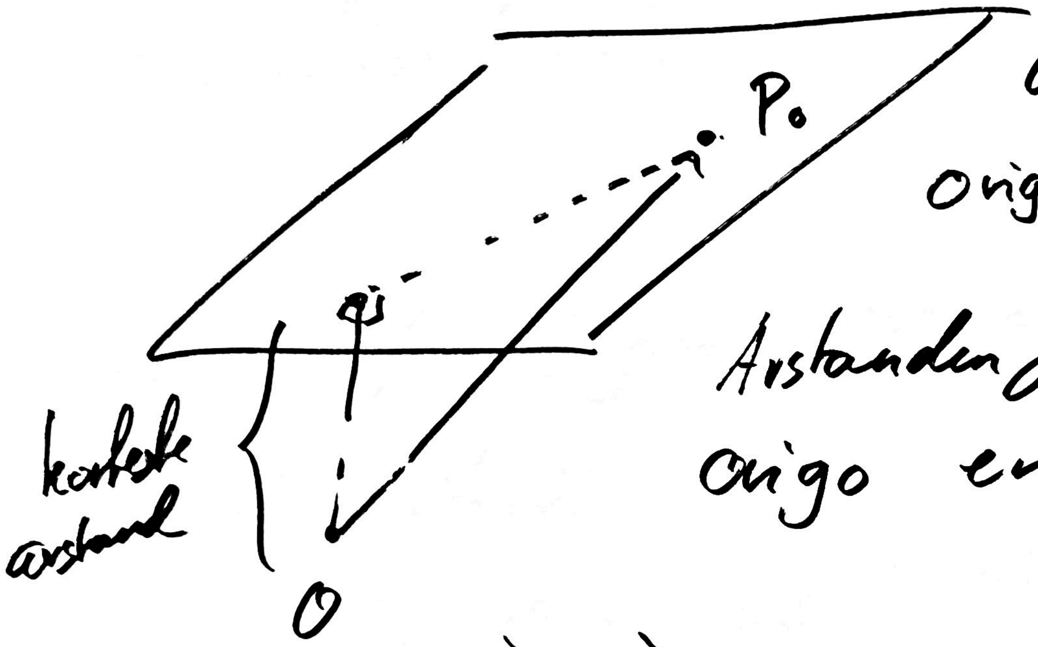
$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= [1,2,-1] - [-1,0,2]$

$= [2,2,-3]$

$[x,y,z] = [-1,0,2] + t[2,2,-3]$

15



$ax+by+cz=d$

Origo i planet $\Leftrightarrow d=0$

Avstanden fra planet til origo er $\boxed{\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \left(= \dfrac{|d|}{|[a,b,c]|} \right.}$

$$\left| \frac{\vec{OP_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \right| = \left| \frac{\vec{OP_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|d|}{|[a,b,c]|}$$

$\vec{n} = [a,b,c]$ $\qquad [a,b,c] \cdot \vec{OP_0} = d$

16

Parametrisert linje

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= 1 + 5t \\ z &= -2 + t \end{aligned}$$

Hvor treffer linjen xy-planet?

xy-planet er planet $z = 0$.

$z = -2 + t = 0$ gir $t = 2$.

$x = 2 - 3 \cdot 2 = -4$

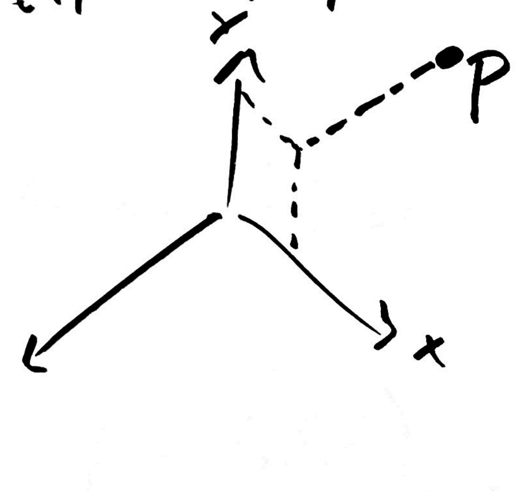
$y = 1 + 5 \cdot 2 = 11$

Linjen treffer xy-planet i $\underline{(-4, 11, 0)}$

17

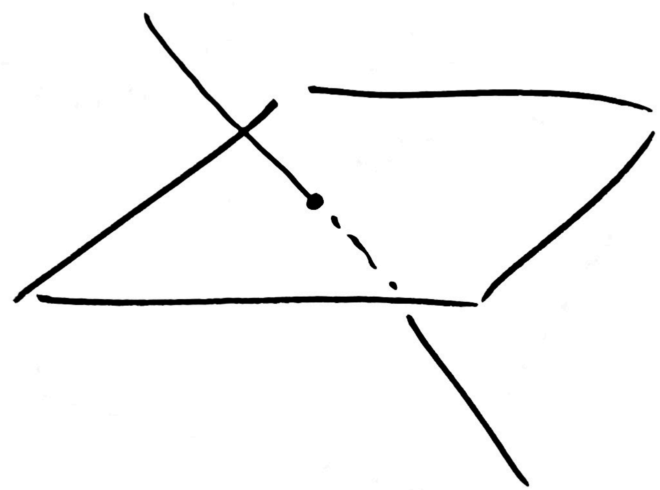
Hva er avstanden fra punktet $(2,-3,5)$ til xy-planet?

Avstanden er $\underline{5}$



Hvor treffer linjen $[x,y,z] = [1,-2,-3] + t[1,1,1]$ $= [1+t, -2+t, -3+t]$

planet $x - y + 2z = 3$



Finner t slik at punktet på linja også ligger i planet

$$\underset{x}{(1+t)} - \underset{y}{(-2+t)} + 2\underset{z}{(-3+t)} = 3$$

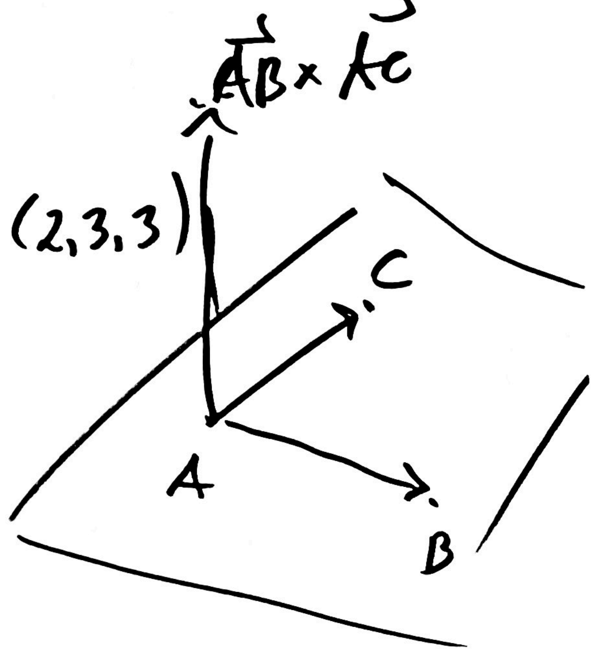
(18)

$$1+2-6+t-t+2t=3$$
$$2t=3+3=6$$
$$t=3$$

punktet på linjen $[x,y,z]=[1,-2,-3]+3[1,1,1]$
$$=[4,1,0]$$

$\underline{P(4,1,0)}$

14.74 Planet gjennom $A(1,1,1)$
$B(5,2,3)$
$C(2,3,3)$



$\vec{AB}=[4,1,2]$
$\vec{AC}=[1,2,2]$

19

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$\vec{n} = [-2, -6, 7]$$

$$[x, y, z] \cdot \vec{n} = d$$

$$-2x - 6y + 7z = d$$

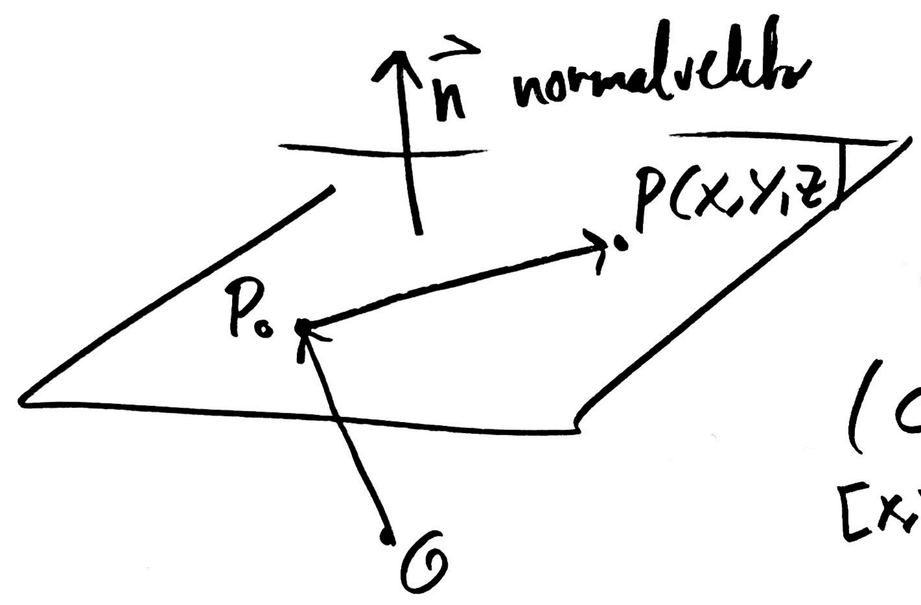
A ligger i planet
setter inn $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

$$-2 - 6 + 7 = -1$$

Likning for planet: $-2x - 6y + 7z = -1$

$$\Leftrightarrow 2x + 6y - 7z = 1.$$

20



P i planet

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\underset{[x,y,z]}{\overrightarrow{OP}} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n}}_{d}$$