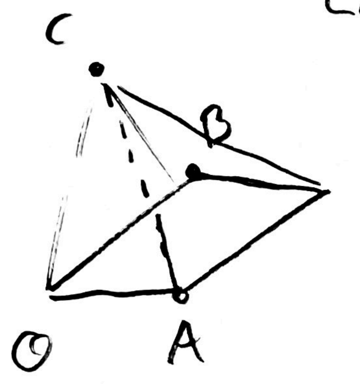
3 nov
2021

14.9 Parametrisering av plan.

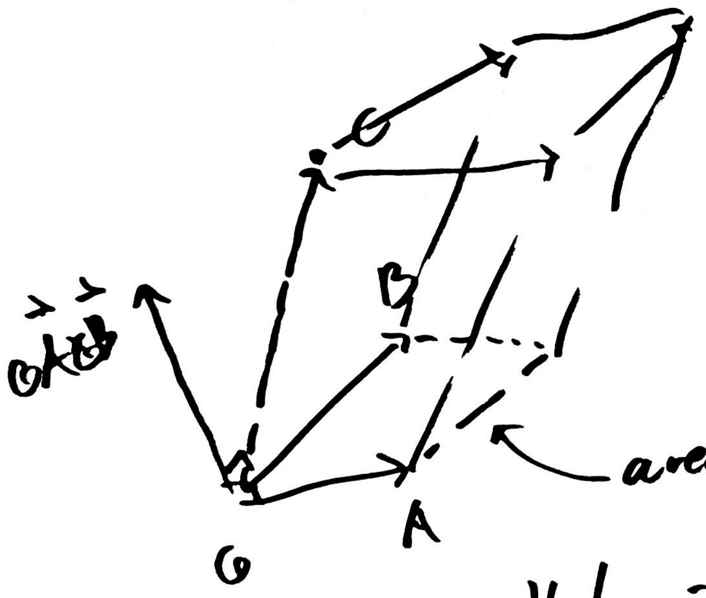
Eksempel med trippelprodukt.

(1)



Volumet $= \frac{1}{3} \cdot$ Volum parallellepipeder utspent av $\vec{OA}, \vec{OB}$ og $\vec{OC}$

$$= \frac{1}{3} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OA} \\ \vec{OB} \\ \vec{OC} \end{pmatrix} \right|$$



areal $|\vec{OA} \times \vec{OB}|$

Volum $= |\vec{OC} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OB})|$

2

Finn volumet til pyramiden med parallellogram grunnflate

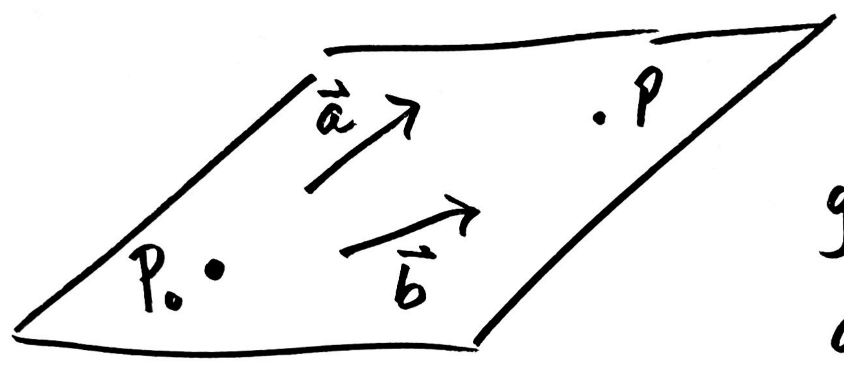
$A\,(1,1,3) \qquad B\,(2,-3,1) \qquad C\,(3,3,3)$

$$V = \frac{1}{3}\cancel{\text{abs}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 3\,\text{abs}\left(\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{3} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \text{abs}\left(1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$V = \text{abs}\left(-4 - (1) + 3(5)\right) = \text{abs}(10)$$

$$\underline{V = 10}$$



$P(x,y,z)$ ligger i planet gjennom $P_0(x_0,y_0,z_0)$ utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$[x,y,z] = \underbrace{[x_0,y_0,z_0]}_{\vec{OP_0}} + s\vec{a} + t\vec{b} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

3

Gi en parametrisering av planet $2x - 3y + 4z = 5$

En normalvektor til planet er $\vec{n} = [2,-3,4]$.
Finner to ikke-parallelle vektorer vinkelrett på $\vec{n}$:
$\vec{a} = [3,2,0]$ og $\vec{b} = [-2,0,1]$, ser at $P_0(1,-1,0)$ ligger i planet.
$(2(1) - 3(-1) + 4(0) = 5)$

Parametrisering $[x, y, z] = \overrightarrow{OP_0} + s\vec{a} + t\vec{b}$

$$= [1, -1, 0] + s[3, 2, 0] + t[-2, 0, 1]$$

Dette kan og skrives

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3s - 2t \\ y &= -1 + 2s \\ z &= t \end{aligned} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

4

Finn en likning for planet gjennom $P_0(4, 3, 2)$
som er parallelt til $\vec{a} = [1, 2, 0]$ og $\vec{b} = [4, 0, 3]$

Finner en normalvektor til planet.

(Generelt vil $\vec{a} \times \vec{b}$ være en slik normalvektor!

Vi ser at $[3, \frac{-3}{2}, -4]$ er en normal vektor

Planet er på formen $3x - \frac{3}{2}y - 4z = d \quad | \cdot 2$

$6x - 3y - 8z = 2d.$

Setter inn koordinatene $P_0(4,3,2)$

$6 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 2d$

5

$24 - 9 - 16 = -1$

Likningen er $\underline{6x - 3y - 8z = -1}$

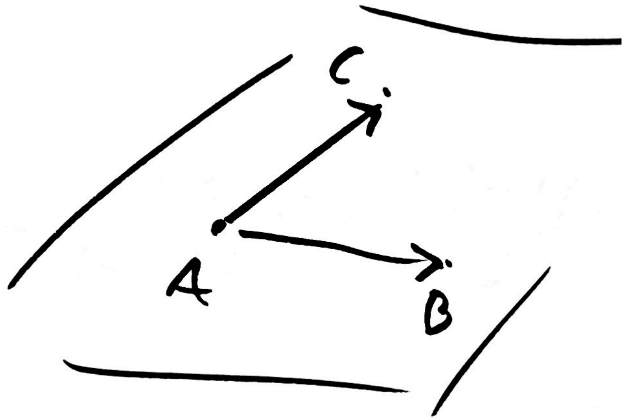
Oppg Et plan går gjennom $A(1,1,1)$ $B(2,0,3)$ $C(0,3,2)$

1) Parametriser planet.

2) Finn en likning for planet.

1)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [2,0,3] - [1,1,1] = [1,-1,2]$$



$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [0,3,2] - [1,1,1] = [-1,2,1]$$

6

Parametrisering $[x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$

$$= [1,1,1] + s[1,-1,2] + t[-1,2,1]$$

$$x = 1 + s - t$$
$$y = 1 - s + 2t \qquad s,t \in \mathbb{R}$$
$$z = 1 + 2s + t$$

2 Likning for planet.

en normalvektor er $\underset{\vec{AB}}{[1,-1,2]} \times \underset{\vec{AC}}{[-1,2,1]}$

7

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{n} = [-5, -3, 1]$$

Likning for planet $\quad \vec{OP} \cdot \vec{n} = \vec{OA} \cdot \vec{n}$

$$\Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$-5x - 3y + z = d$$

$A(1,1,1)$ ligger i planet: $\quad -5 - 3 + 1 = -7 = d$

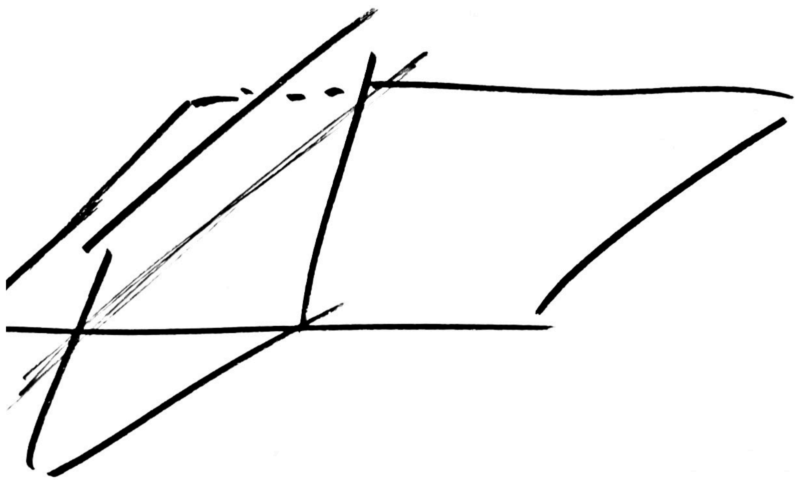
$$-5x - 3y + z = -7 \qquad | \text{ganger med } -1$$

$$\underline{5x + 3y - z = 7}$$

8

Oppg (jul 2020) Parametriser linjen som er snittet av plana gitt ved

$$x - 4z = 12 \quad \text{og} \quad x + y - z = 3.$$



En retningsvektor $\vec{r}$ for linjen er en vektor som ligger i begge plana.
$\vec{r}$ ortogonal til begge normalvektorene til plana.

Normalvektorene: $[1, 0, -4]$ og $[1, 1, -1]$

$$[1,0,-4] \times [1,1,-1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [4, -3, 1]$$

(9) Retningsvektor $\vec{r} = [4, -3, 1]$.

Felles punkt i plana: $P_0(0, 0, -3)$

En parametrisering er

$$\underline{[x, y, z] = \underbrace{[0, 0, -3]}_{\vec{OP_0}} + \underbrace{t[4, -3, 1]}_{+t\vec{r}}}$$

setter $x = 0$: $-4z = 12$ og $y - z = 3$

$z = -3$ så $y = 3 + z = 3 - 3 = 0$

så $(0, 0, -3)$ ligger på snittlinjen.

oppg. Finn likningen til planet

som er parallelt til planet parametrisert

ved

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2s - t \\ y &= -s \\ z &= 2 + t \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} &= -1 + 2s - t \\ &= 0 - s + 0 \\ &= 2 + 0 + t \end{aligned} \right)$$

10

og som går gjennom $P_0(-3,2,4)$.

vektorene $[2,-1,0]$ og $[-1,0,1]$ ligger i planet.

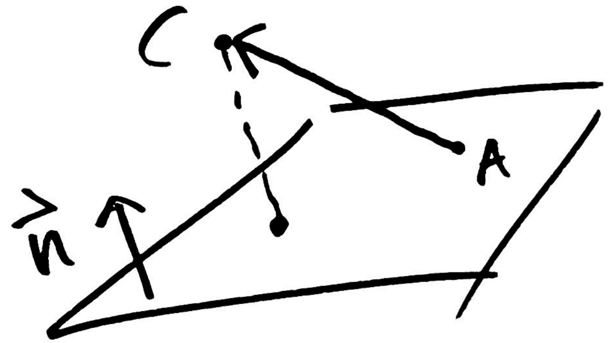
En normalvektor er $[2,-1,0] \times [-1,0,1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= [-1,-2,-1] = -[1,2,1]$. Velger $\vec{n} = [1,2,1]$.

$$\vec{n} \cdot [x,y,z] = \vec{n} \cdot \vec{OP_0} = [1,2,1] \cdot [-3,2,4] = 5$$

$$\underline{x + 2y + z = 5}$$

Finn korteste avstand mellom $C(-1,0,2)$ og planet $x+2y+z=5$



$A(1,1,2)$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [-1,0,2] - [1,1,2]$

$= [-2,-1,0]$

11

$\vec{n} = [1,2,1] \qquad \vec{AC}_{\parallel} = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

Korteste avstand $\quad |\vec{AC}_{\parallel}| = \dfrac{|\vec{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$= \left| \dfrac{[-2,-1,0]\cdot[1,2,1]}{|[1,2,1]|} \right| = \dfrac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$

$= \underline{\dfrac{4}{\sqrt{6}}}$ (utvide med $\sqrt{6}$ $\quad \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$)