8.nov
2021

17 Følger og rekker.

Tallfølger $1, 2, 3, 4$ endelig tallfølge

$1, 3, 5, 7, 9$

$1, -1, 1, -1, 1, -1$

1

ordna samling tall. ledd (3. ledd)

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ endelig

$a_1, a_2, a_3, \dots$ uendelig

Naturlige tall $1, 2, 3, 4, \dots$ $a_n = n$

$1, 3, 5, 7, \dots$ oddetallene $b_n = 2n - 1$

$b_{n+1} = b_n + 2$

$2, 4, 6, \dots$ $c_n = 2n$

$c_{n+1} = c_n + 2$

kvadrattallene $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ $d_n = n^2$

primtallene $p_1, p_2, p_3, \dots$ uendelig tallfølge.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$

2

ingen formel for p_n uttrykt ved n.

<u>Rekursiv formel</u> a_n kan beskrives ved foregående element(er)

Fibonacci følgen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $n \geq 2$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$

3

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

$$g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$g_1 = 1 \quad \text{og} \quad g_{n+1} = \frac{1}{2} g_n.$$

Rekker

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$n \geq 1$ (viser dette senere

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

uendelige rekker.

Aritmetiske følger $\qquad a_{n+1} = a_n + d$

$$a_0,\ a_1 = a_0 + d,\ a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d,\ a_3 = a_0 + 3d, \dots$$

4 bestemt av 1. leddet og differansen d.

$a_1 = 3,\ d = 4$ $\qquad 3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_n = 3 + 4(n-1) = \underline{4n-1}$$

oppg. Aritmetisk tallfølge $\underset{1}{\_},\ \underset{\substack{\| \\ a_2}}{3},\ \underset{5}{\_},\ \underset{\substack{\| \\ a_4}}{7},\ \_,$ 9, 11, 13

Hva er a_1, d og a_n?

$$a_4 - a_2 = 2\cdot d$$

$$7 - 3 = 4 = 2\cdot d \quad \text{så } d = 2$$

$$a_1 = 3 - d = 1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 1 + (n-1)\cdot 2$$

$$= \underline{2n - 1}$$

5

Dette er følgen av oddetall.

oppg.

Aritmetisk følge

$b_3 = 4$ og $b_7 = 10$

Finn differansen d og b_n

$$b_7 - b_3 = (7-3)\cdot d \quad , \quad 10 - 4 = 4\cdot d$$

$$6 = 4\cdot d$$

$$\underline{d = \frac{3}{2}}$$

$$b_n = b_3 + (n-3)\cdot d = 4 + (n-3)\cdot\frac{3}{2}$$

$$= 4 - (4.5) + \frac{3}{2}n = \underline{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n}$$

$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}$ oppgitt

analog til ~~oppg. 2~~ oblig 3.

Hva er $|\underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}|$

$|\underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}}|$

6

og vinkel mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Tilsvarende $|\vec{v}|$...

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos(w) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

gir vinkelen w mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$...

7

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+4+5=15$, .

bevis

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

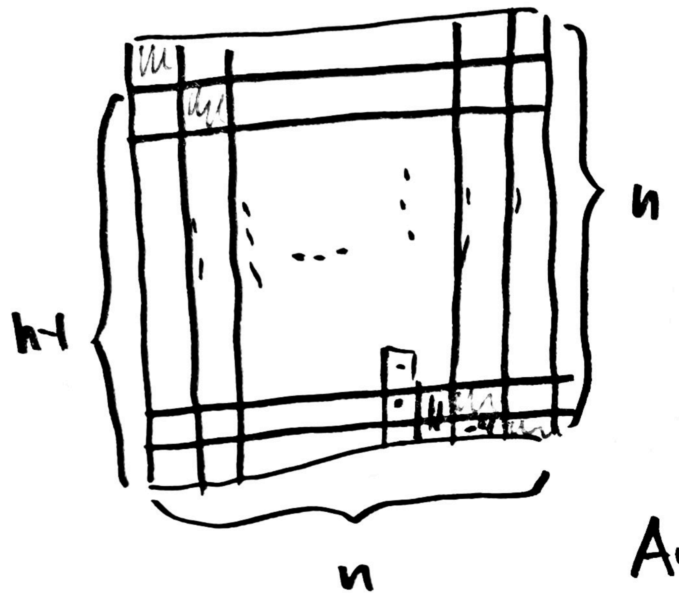
to kopier av rekken

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ ledd}} = (n+1)\cdot n$$

Derfor er $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

8



n^2 ruter

n ruter på diagonalen.

Antall ruter under diagonalen

$1+2+3+\cdots(n-1)$

= antall ruter over diagonalen

$= \dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{((n-1)+1)(n-1)}{2}.$

Alternativt bevis.

$1+2+\cdots+100 = \dfrac{100\cdot(100+1)}{2} = 50\cdot 101 = \underline{5050}$

Oppg. Finn summen av de naturlige tallene $20+21+\cdots+70$

9

$$(1+2+3+\cdots+70)-(1+2+3+\cdots+19)$$

$$\frac{70\cdot 71}{2}-\frac{19\cdot 20}{2}=35\cdot 71-190$$

$$(30+5)(70+1)-190$$

$$=2100+30+350+5-190$$

$$2485-190=\underline{2295}$$

n første positive oddetallene

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$$

n-te ledd

$$=(-1)\cdot n+2(1+2+3+\cdots+n)=-n+2\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

$$=-n+(n+1)\cdot n=-n+n^2+n$$

$$\underline{=n^2}$$

$n=1$ ✓

$n=2$: $1+3=4=2^2$

$n=3$: $1+3+5=9=3^2$

$n=4$: $1+3+5+7=16=4^2$

$n=5$: $1+3+5+7+9=25=5^2$.

(10)

$$4+7+10+13+\cdots \qquad d=3, \quad a_1=4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$= 4+(n-1)\cdot 3$$

Hva er $a_1+a_2+\cdots+a_n$?

$$4+(4+3)+(4+(2\cdot 3))+(4+3\cdot 3)+\cdots(4+(n-1)\cdot 3)$$

$$= \underset{a_1}{4}\cdot n + \underset{d}{3}\big(\underbrace{1+2+\cdots+(n-1)}_{\frac{(n-1)n}{2}}\big)$$

$$= 4n + 3\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[8n+3(n^2-n)\right] = \underline{\frac{1}{2}(3n^2+5n)}$$

17.4 generelt $\quad a_n = a_1 + d(n-1)$

(11)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + d(n-1))$$

$$n \cdot a_1 + d\Big(\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)}_{\frac{n(n-1)}{2}}\Big) = n\left(a_1 + \frac{d(n-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\big(2a_1 + d(n-1)\big) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{antall}\\ \text{ledd}\end{matrix}\right) \cdot \frac{(\text{første ledd} + \text{siste ledd})}{2}$$

Eks $\quad 20 + 21 + \cdots + 70 = 51 \cdot \frac{20+70}{2} = 51 \cdot 45$

$$= 50 \cdot 45 + 45$$

$$= 2250 + 45$$

$$= \underline{2295}$$

ØVING

Oppg. Hvor mange positive partall i økende rekkefølge ~~Fra~~ må vi legge sammen for at vi skal få størst mulig sum under 1000? Hva er summen.

12

$$S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$

$$S_N < 1000 \quad \text{og} \quad S_{N+1} \geq 1000.$$

$$S_n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2\,\frac{(n+1)\cdot n}{2} = \underline{n(n+1)}$$

$N(N+1) < 1000$ økende. $\quad N$ størst mulig

N stor $\quad N(N+1) \sim N^2 \qquad N^2 = 1000$ når $N \sim \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31.62\ldots$

$$S_{31} = 31 \cdot 32 = (30+1)(30+2) = 900 + 3\cdot 30 + 1\cdot 2 = \underline{992}$$

$$S_{32} = 32 \cdot 33 = 32 \cdot (31 + 2) = 992 + 2\cdot 36 = 1064$$

$N=31$ og summen er da

$2+4+6+\cdots+62 = \underline{992}$.

(13)

Oppg. $200+201+\cdots+400$ Finn summen.

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $a_1+\cdots+a_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{antall} \\ \text{ledd}}}{n} \cdot \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$(1+2+3+\cdots+400)$

$-(1+2+3+\cdots+199)$

$= \frac{400 \cdot 401}{2} - \frac{199 \cdot 200}{2}$

$= \frac{200}{2}[2 \cdot 401 - 199]$

$= 100[802-199] = 100 \cdot 603$

$= \underline{60300}$

summen $= 201 \cdot \frac{200+400}{2}$

$= 201 \cdot 300 = \underline{60300}$

17.11 $a_1 = 3$ $\qquad a_i = a_{i-1} + 4 \quad i \geq 2$

a) $a_1 = 3 \qquad a_2 = 3 + 4 = 7 \qquad a_3 = 11$

$a_4 = a_3 + 4 = 15 \qquad a_5 = a_4 + 4 = 19 \ldots$

14

b) $a_n = a_1 + 4(n-1)$

$= 3 + 4(n-1) = \underline{4n - 1}$

Oppg Finn summen av alle heltall delelige med 3 mellom 50 og 500.

$(3 \cdot 17 = 51)$

$\left(\begin{matrix} 3 \cdot 170 = 510 \\ 3 \cdot 166 = 498 \end{matrix} \right)$

$\underset{3 \cdot 17}{51} + 54 + 57 + 60 + \cdots + \underset{3 \cdot 166}{498}$

Antall ledd $1 + (166 - 17) = \underline{150}$

$\text{sum} = 150 \cdot \frac{51 + 498}{2} = 150 \cdot \frac{549}{2} = \underline{41175}$