16.11
2021

Rekker

Aritmetiske $\quad a_{i+1} = a_i + d \quad$ alle i

$$a_j = a_i + (j-i)d$$

(1)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n\left(\frac{a_1 + \cdots}{2}\right.$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots \quad n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vendelige aritmetiske rekker $\quad 0 + 0 + 0 + \cdots$ konvergerer

alle andre vendelige aritmetiske rekker divergerer.

$$\underbrace{a_2 + \cdots + a_n}_{n-1 \text{ elementer}} = (n-1)\cdot\left(\frac{a_2 + a_n}{2}\right)$$

antall ledd

$a_n = 5 + 2n$

$a_1 = 7$

$a_n = 5 + 2n = 37$

$2n = 32$, så $n = 16$

$$7 + 9 + 11 + \cdots \quad 37$$

$$= 16 \cdot \frac{37+7}{2} = \underline{16 \cdot 22} = \underline{\underline{352}}$$

Geometriske rekker

$a_{i+1} = k a_i$ alle i

$k = \frac{a_{i+1}}{a_i}$ $(a_i \neq 0$

(2) $1+2+4+8$ $\quad k=2$

$a+a+a+\cdots$ $\quad k=1$

$3+0+0+\cdots$ $\quad k=0$

$$a_0 \underbrace{(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})}_{n \text{ ledd}} = \begin{cases} a_0 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} & k \neq 1 \\ a_0 \cdot n \end{cases}$$

$1+k+k^2+\cdots$ <u>konvergerer</u>

hvis delsummene $S_n = (1+k+\cdots+k^{n-1}) \cdot a_0$

nærmer seg et tall S når $n \to \infty$

S er <u>summen</u> til rekken.

$$1 + k + k^2 + \cdots = \frac{1}{1-k} \qquad |k| < 1$$

divergerer for $|k| \geq 1$.

③

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ når $n \to \infty$

selv om $a_n \to 0$, $n \to \infty$, så behøver ikkje rekken konvergere.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

divergerer.

$$(S_n \geq \sqrt{n})$$

(4) Hvilke rekker er både geometriske og aritmetisk?
følger

antall ledd

1 a ✓

2 $a_1 + a_2$ $\qquad a_2 = a_1 + d$

for $a_1 \neq 0$ $\qquad a_2 = k \cdot a_1$

og $0 + 0$ $\qquad 0 + 2$ ikkje geometrisk

≥ 3 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

alle a_i like $a_1 + a_1 + a_1 + \cdots$ ✓ $\qquad d = 0$, $k = 1$.

Vi viser at alle rekker med 3 eller flere ledd må være konstante (komme fra følger)

$a_n = a_1$ for alle n.

5

a_1 $\quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d$ ant.

$a_2 = k \cdot a_1 \quad a_3 = k^2 a_1$ geom.

$a_1 + d = k \cdot a_1 \quad a_1 + 2d = k^2 a_1$

$d = k a_1 - a_1$

setter inn for d : $(a_1 + d) + d = k^2 a_1$

$k \cdot a_1 + k a_1 - a_1 = k^2 a_1$

$a_1 \neq 0$ deler med a_1 $\quad 2k - 1 = k^2$

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$(k-1)^2 = 0$

Eneste løsning: $k = 1$ så $a_1 = a_2 = a_3$

og $d = 0$.

1) Finn summen til den aritmetiske rekken

$$7 + 10 + 13 + \cdots + 235$$

2) Finn summen til alle positive heltall som er delelige med både 6 og 4 og som mindre enn eller lik 1000. (ex 2012

3) Finn summen av alle positive heltall som er delelig med 2 <u>eller</u> 5 (eller begge) og som er mindre enn eller lik 1000 (ex 2014)

6

1 $7+10+13+\dots \quad +235$ $\qquad a_i = 4+3i$

$a_1 = 7 \dots$

Antall ledd: $\quad a_n = 4+3n = 235$

$3n = 231 = 210 + 21$

7 $\quad n = \frac{210}{3} + \frac{21}{3}$

$= 70 + 7 = \underline{77}$

Summen er lik $\quad 77 \cdot \frac{7+235}{2} = 77 \cdot 121$

$= \underline{9317}$

2) $6 = 2 \cdot 3$ $\quad 4 = 2 \cdot 2$

k delelig med 6 og 4 $\Leftrightarrow$ k delelig med 3 og $4 = 2^2$

$\Leftrightarrow$ k delelig med 12.

8

$12 + 24 + \cdots \quad 12 \cdot n$

$= 12(1 + 2 + \cdots n)$

$= 12 \dfrac{n(n+1)}{2} = 12 \cdot \dfrac{83 \cdot 84}{2}$

$= 12 \cdot 83 \cdot 42 = \underline{41\,832}$

n største nat tall

$12 \cdot n \leq 1000$

$12 \cdot 80 = 960$

$12 \cdot 83 = 960 + 36$
$= 996$

$\underline{n = 83}$
antall ledd

3) $2 + 4 + \underline{5} + 6 + 8 + \underline{\underline{10}} + 12 + 14 + \underline{15} + 16 + \cdots$

$= (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots \quad 1000)$

$+ (5 + 10 + 15 + 20 + \cdots \quad + 1000)$

9 $- (\quad 10 + 20 + 30 + \cdots + 1000)$: multipler av 10 telles dobbelt :

$= \left(\sum_{i=1}^{500} 2i\right) + \left(\sum_{j=1}^{200} 5j\right) - \left(\sum_{k=1}^{100} 10k\right)$

$= 500 \cdot \frac{1002}{2} + 200 \cdot \frac{1005}{2} - 100 \cdot \frac{1010}{2}$

$= 500 \cdot 501 + 100 \cdot 1005 - 100 \cdot 505$

$= 100 [5 \cdot 500 + 5 + 1005 - 505]$

$= 100 [4 \cdot 500 + 1005] = \underline{300\,500}$

(lignen på oppg. 5c desember 2014)

2014 des. 5a)

$a_1 = 1$ $\quad k = -1/2$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

10

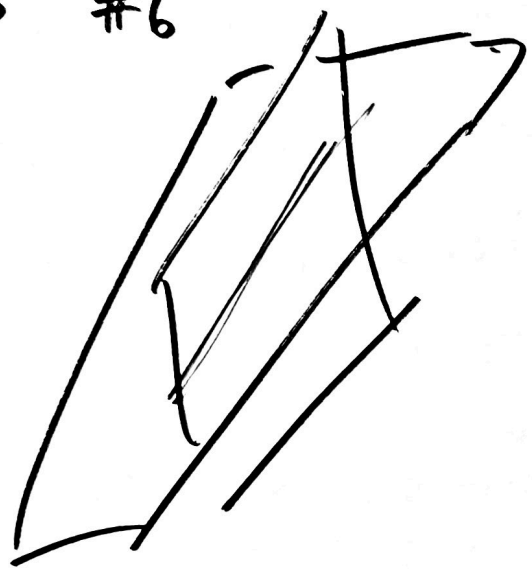
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

$|k| < 1$ så rekken konvergerer.

$1 + k + k^2 + \cdots = \frac{1}{1-k}$ $\quad |k| < 1$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \underline{\frac{2}{3}}$

oblig 3 #6



$$x + y + z = 3$$

"to"

$$x - y + 2z = 0$$

parametriser snittlinjen.

#7

$\vec{a} = [1,1,1]$ og $\vec{b} = [1,-1,2]$

Finn alle plan utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med avstand til origo lik 10.

#6 Snittlinjen til plana står vinkelrett
oblig 3 på normal vektorene til plana.

$n_1 = [1, 1, 1]$

(11) $n_2 = [1, -1, 2]$

Linjen er parallell til $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

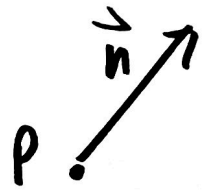
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [3, -1, -2]$$

Fellespunkt på plana $P(x, y, z)$ $\quad x + y + z = 3$

$x - y + 2z = 0$

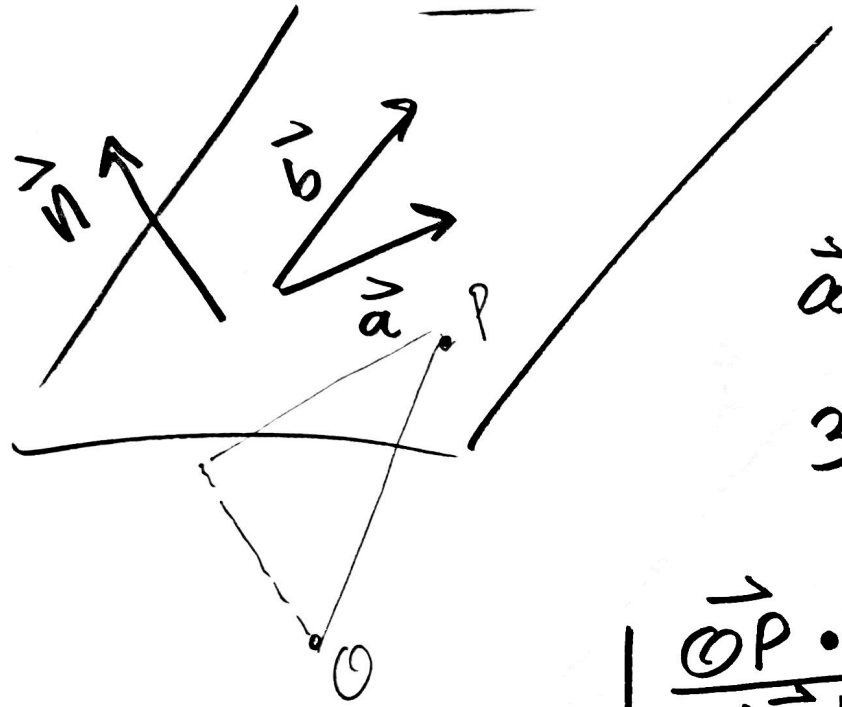
$P(0, 2, 1)$



Linjen er $\underline{[x, y, z] = [0, 2, 1] + t[3, -1, -2]}$

$t \in \mathbb{R}$

#7
oblig 3



(12)

$$[x, y, z] \cdot \vec{n} = d$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [3, -1, -2] = \vec{n}$$

$$3x - y - 2z = d$$

$$\left| \frac{\vec{OP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$ avstanden til origo.

$\vec{OP} \cdot \vec{n} = d$
for P i planet.

Avstanden til origo $\dfrac{|d|}{|\vec{n}|} = 10$

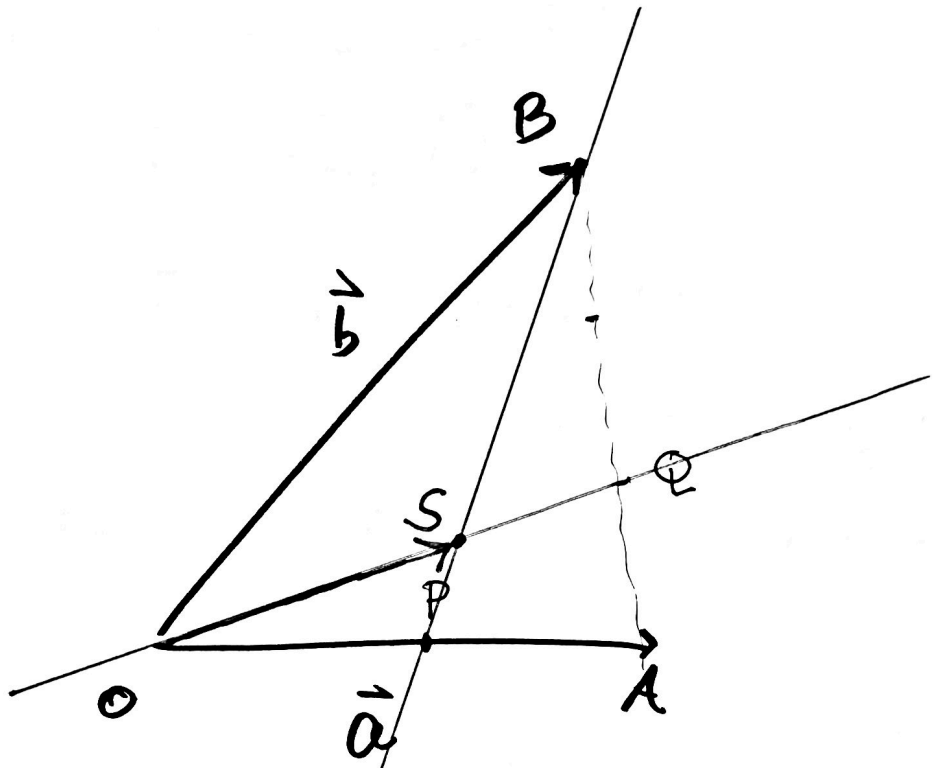
$$d = \pm 10|\vec{n}| = \pm 10\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$
$$= \pm 10 \cdot \sqrt{14}$$

To plan: $3x - y - 2z = 10\sqrt{14}$ og $3x - y - 2z = -10\sqrt{14}$.

oblig 3

#3 Figur

(13)



$\vec{OS}$ er en kombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

⋮

(14)

Matematisk <u>induksjon</u>

To følger $F_1, F_2, F_3, \ldots$

$T_1, T_2, T_3, \ldots$

Hvis $F_1 = T_1$ og $F_{i+1} - F_i = T_{i+1} - T_i$ for alle i

Dette gir at $F_i = T_i \Rightarrow F_{i+1} = T_{i+1}$

Da er $F_i = T_i$ for alle i.

Bruker induksjon til å synte

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$F_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$T_n = n(n+1)/2$$

$$F_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = T_1 \checkmark$$

$$F_n - F_{n-1} = n$$

$$T_n - T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n}{2}(n+1-(n-1)) = \frac{n}{2} \cdot 2 = n$$

15

for alle n.

ved matematisk induksjon er $F_n = T_n$ for alle n.

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$S_1 = 1 \qquad S_n - S_{n-1} = n^2 \text{ for alle } n.$$

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad P_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1.$$

(16) $$P_n - P_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n}{6}\Big((n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\Big)$$

$$\frac{n}{6}\Big(2n^2+3n+1 - (2n^2-3n+1)\Big) = \frac{n}{6}\big(\underbrace{3n-(-3n)}_{6n}\big)$$

$$= n^2 \text{ for alle } n.$$

$$S_1 = P_1 \qquad P_n - P_{n-1} = S_n - S_{n-1} \text{ for alle } n$$

ved matematisk induksjon er

$$S_n = P_n \text{ for alle } n.$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

summen av de n første kvadrattallene.

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$S_2 = 1 + 2^2 = 5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \checkmark$$

$$S_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \checkmark$$

$$S_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} \checkmark$$

beviser formelen for S_n fra ~~kl 11:30.~~