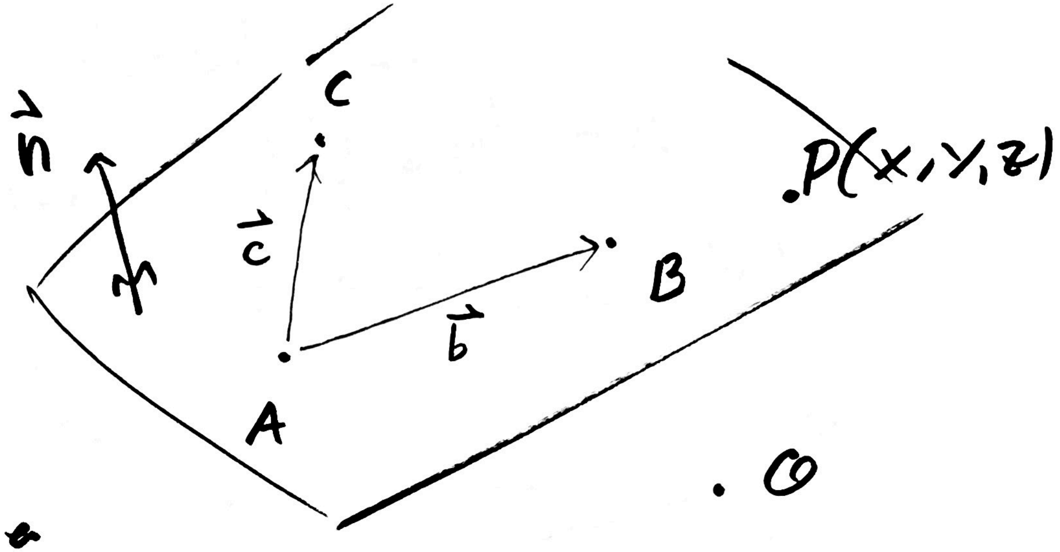
17.11
2021

Plan i rommet



A, B, C punkt i rommet
Anta de ikkje ligger på en linje. Da bestemmer de ett plan som inneholder punktene.

Parametrisering punkt i planet $P(x,y,z)$

$$\vec{OP} = [x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Likning som gir plan : $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ ortogonal til $\vec{b}$ og $\vec{c}$
$\neq \vec{0}$ når $\vec{b}$ og $\vec{c}$ ikkje er parallelle

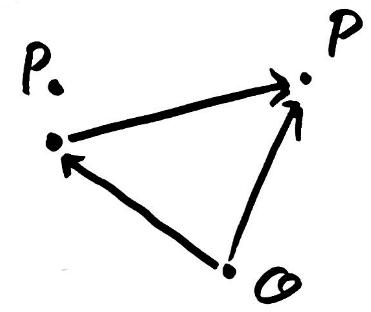
$A = P_0(x_0, y_0, z_0)$ punkt i planet , $\vec{n}$ normalvektor

$P(x,y,z)$ ligger i planet $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$ (eller er $\vec{0}$) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$|\overrightarrow{P_0P}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(v)$

$\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er ortogonale.



$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

$$[x,y,z] - [x_0, y_0, z_0]$$

$$= [x-x_0, y-y_0, z-z_0]$$

$$\vec{n} = [a,b,c]$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-x_0, y-y_0, z-z_0] \cdot [a,b,c] = 0$$

$$\underline{ax + by + cz = d} = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Eksempel $A(1,-1,2)$ $B(0,3,1)$ $C(2,1,1)$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [0,3,1] - [1,-1,2] = [-1,4,-1]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [2,1,1] - [1,-1,2] = [1,2,-1]$$

A, B, C ligger ikkje på en linje.

Parametrisering av planet gjennom A, B og C:

$$[x,y,z] = \underbrace{[1,-1,2]}_{\vec{OA}} + \underbrace{s[-1,4,-1]}_{s\vec{AB}} + \underbrace{t[1,2,-1]}_{t\vec{AC}}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - s + t \\ y &= -1 + 4s + 2t \\ z &= 2 - s - t \end{aligned}$$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Likning for planet gjennom A, B og C.

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$ er parallelle til planet

$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ normalvektor til planet.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= [-2, -2, -6] = -2[1, 1, 3]$$ (sjekker at vektoren er ort. til $\vec{AB}$, $\vec{AC}$)

Velger $\vec{m} = [1,1,3]$ som normalvektor til planet.

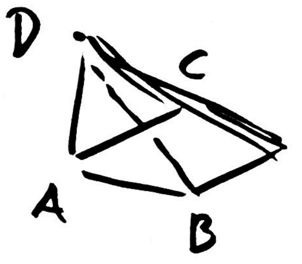
$[x, y, z] \cdot \vec{m} = d$ B er i planet

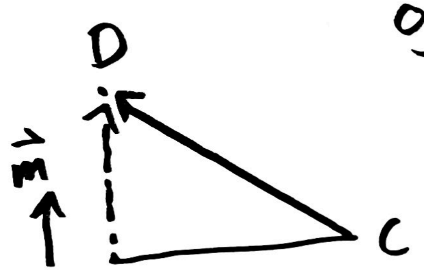
$[x, y, z] \cdot [1,1,3] = \vec{OB} \cdot \vec{m} = [0,3,1] \cdot [1,1,3]$

$$\underline{x + y + 3z = 6}$$

oppg.1 Finn korteste avstand fra planet til punktet $D(1,1,1)$.

Oppg 2 Finn Volumet til pyramiden med grunnflate parallellogrammet i planet utspent av A, B og C og topp i D





Korteste avstand er lengden til komponenten til $\vec{CD}$ langs $\vec{m}$

$C(2,1,1)$

$\vec{CD}=[-1,0,0]$

$\vec{m}=[1,1,3]$

$$\frac{\vec{CD}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|}\cdot\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{\vec{CD}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m}$$

Lengden er $\dfrac{|\vec{CD}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|} = \dfrac{|[-1,0,0]\cdot[1,1,3]|}{|[1,1,3]|}$

$$= \frac{|-1|}{\sqrt{1+1+9}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{11}}}$$

2 Parallellogrammet gitt av A, B og C utspent av $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$.

Areal $A = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin(w) = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$V = A \cdot \text{høyden} \cdot \frac{1}{3} = |\underbrace{\vec{AB} \times \vec{AC}}_{\vec{n}}| \cdot \left| \frac{\vec{BD} \bullet \vec{m}}{\vec{m}} \right| \cdot \frac{1}{3}$$

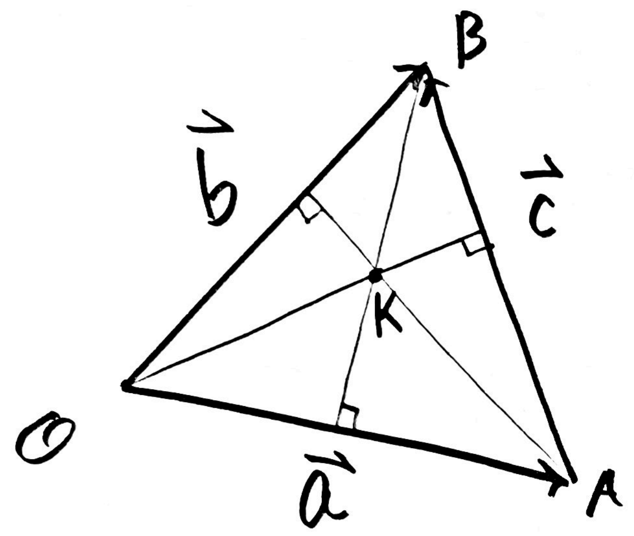
$m = -2\vec{n}$

$$= \frac{1}{3} |\vec{n}| \left| \frac{|\vec{CD} \bullet \vec{n}|}{|\vec{n}|} \right|$$

$$= \frac{1}{3} |\vec{CD} \bullet \vec{n}| = \frac{1}{3} \left| [-1, 0, 0][-2, -2, -6] \right|$$

trippel produkt

$$= \underline{\frac{2}{3}}$$



Vi skal vise at de tre linjene gjennom hvert hjørne og vinkelrett på motstående side har <u>ett</u> punkt K felles.

$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

(Vanskelig eksempel)

Finner snittet mellom linjene fra hjørnene A og B og sjekker at linjen fra O til dette punktet er ortogonalt til $\vec{c}$.

Finner vektoren vinkelrett på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\vec{n}_a = \vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}, \quad \vec{n}_b = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

$$\vec{n}_a \cdot \vec{a} = 0 \qquad \vec{n}_b \cdot \vec{b} = 0$$

Parametriserer linjene: parametre $s, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{OA} + s\,\vec{n}_b = \overset{\text{felles punkt}}{[x, y, z]} = \vec{OB} + t\,\vec{n}_a$$

$$\vec{a} + s\left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right) = \vec{b} + t\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right)$$

($\vec{a}, \vec{b}$ ikke parallelle

d.v.s. lineært uavhengige $k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow k, l = 0$)

$$\underbrace{\left(1 + s + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}t\right)}_{0}\vec{a} = \underbrace{\left(1 + t + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}s\right)}_{0}\vec{b}$$

Lineært likningssystem med 2 ukjente, s og t og 2 likninger.

$$t = -1 - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}s$$ (fra 2. likning)

$$1 + s + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\left(-1 - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}s\right) = 0$$ (satt inn i 1. likning)

$$s\left(1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} - 1$$ gir s.

K snittpunktet $\vec{OK} = \vec{a} + s\left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right)$ gir en komplisert formel for koordinatene til K.

Sjekker $\vec{OK}\cdot\vec{c} = 0 \iff \underbrace{\left(1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}\right)\vec{OK}}_{\vec{v}}\cdot\underbrace{\vec{c}}_{\vec{b}-\vec{a}} = 0$

skaleres

$$\left[\overbrace{\left(1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\right)\vec{a} + \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} - 1\right)}^{\vec{v}}\left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{c}$$

$$\left(1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2\right) + \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} - 1\right)\underbrace{\left(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2 - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\left(|\vec{b}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right)}_{\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2} - |\vec{a}|^2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\left(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2\right) + |\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$

$$- \vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^3}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$$

$$= \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}|\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2} = 0$$

Dette viser at de tre linjene møtes
i ett felles punkt.