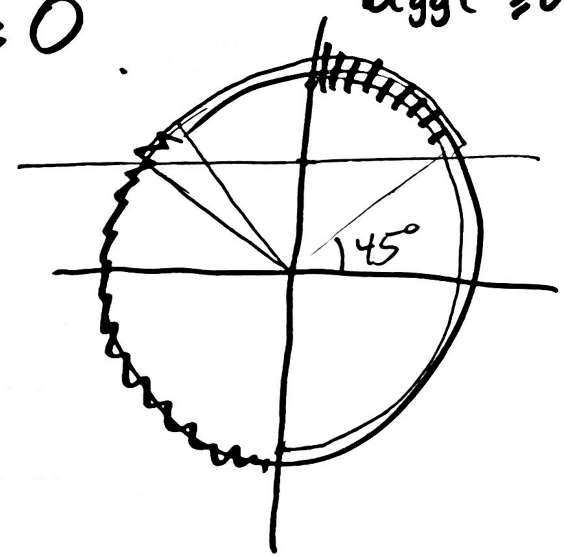
24 nov 2021   1. des 2014

2a) $2\sin v \cos v \geq \sqrt{2}\cos v$ $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$\Leftrightarrow 2\sin v \cos v - \sqrt{2}\cos v \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos v\,(\sqrt{2}\sin v - 1) \geq 0$.

begge ≥ 0



$\sqrt{2}\cos v \geq 0$

$\sin v \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Løsningene er

$v \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

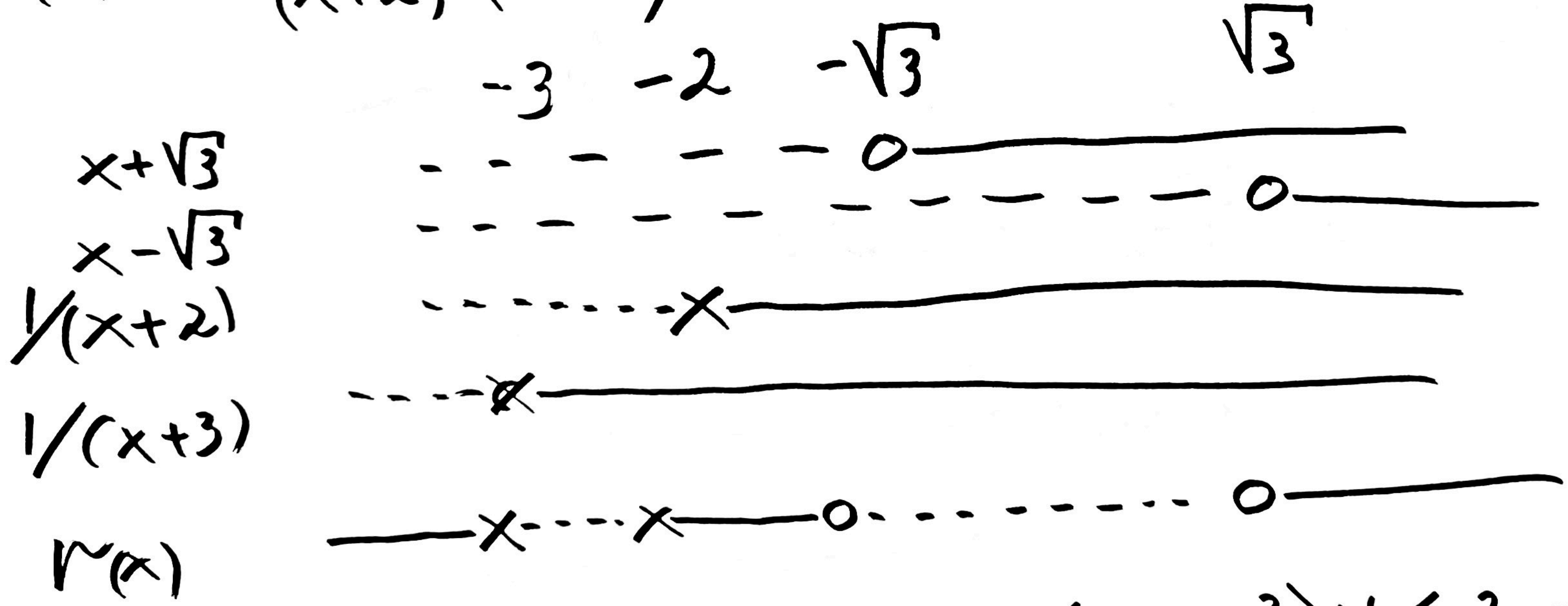
2b) $\dfrac{x^2-3}{x^2+5x+6} \geq 0$

$x^2-3 = x^2-(\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$x^2+5x+6 = x^2+(2+3)x+2\cdot 6 = (x+2)(x+3)$

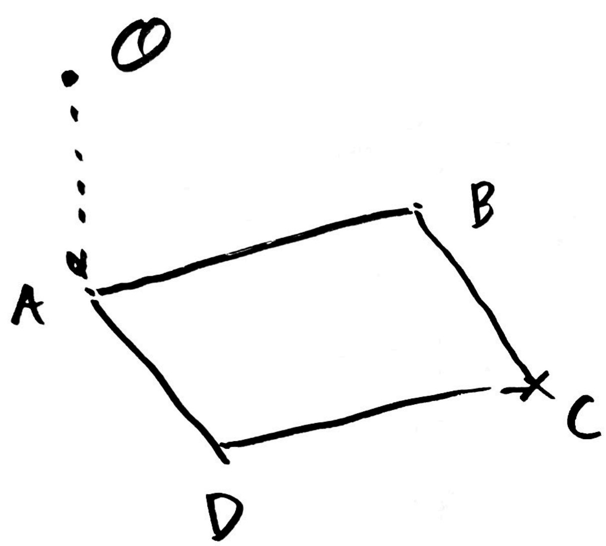
$r(x) = \dfrac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x+2)(x+3)} \geq 0$

$\sqrt{3} \sim 1.73$



Løsningene er $x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty \rangle$

3a)

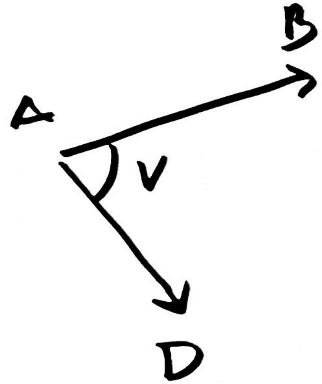


$\vec{AB} = \vec{DC}$

$\vec{AD} = \vec{BC}$

$$\vec{OC} = \underbrace{\vec{OA} + \vec{AD}}_{\vec{OD}} + \underset{\vec{AB}}{\underset{\parallel}{\vec{DC}}}$$

$$= \vec{OD} + \vec{AB}$$



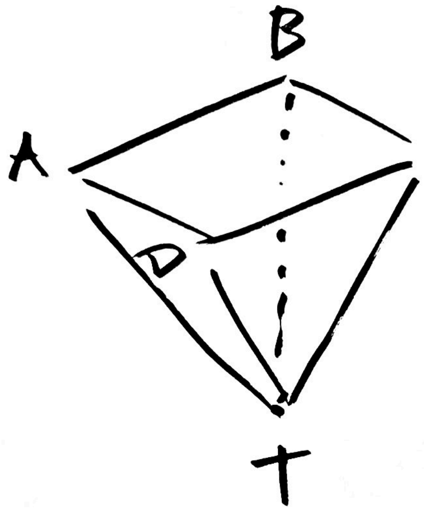
$$\cos V = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$$

Areal parallellogram ABCD

$|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \sin V$

alternativt $|\vec{AD} \times \vec{AB}|$. ✓ (trenger x-prod. i c))

3 c)



$V = \frac{1}{3} \left| \left(\vec{AB} \times \vec{AD} \right) \cdot \vec{AT} \right|$

4 oppg. a) Finn likning for planet

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2s + t \\ y &= 2 + s \\ z &= -1 - s - t \end{aligned}$$

b) Parametriser snittet mellom planet i a) og planet $x + y + z = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektorer i planet

Normalvektor: $[2, 1, -1] \times [1, 0, -1]$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [-1, -(-2+1), -1]$$

$$= [-1, 1, -1]$$

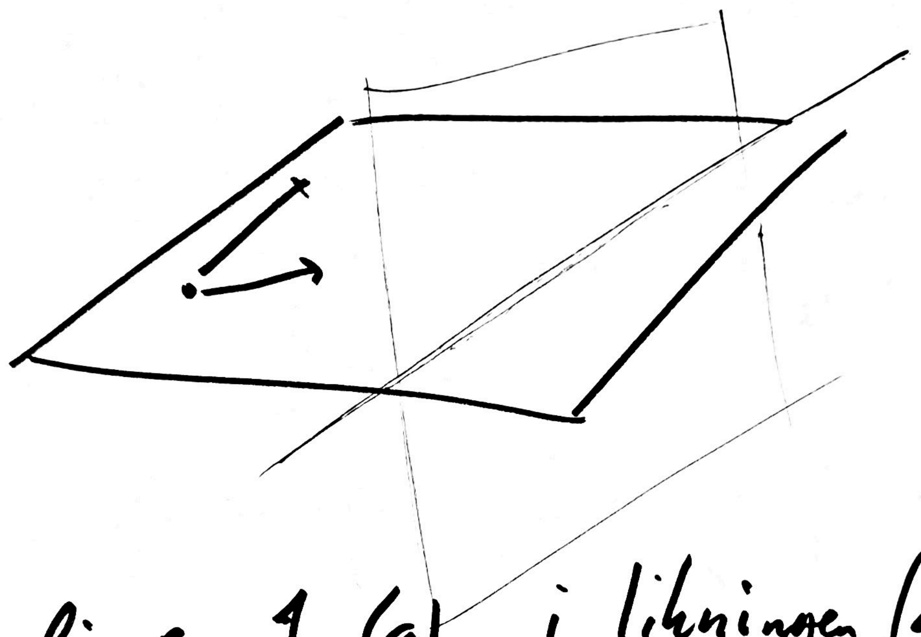
Velger

$\vec{n} = [1, -1, 1]$

Planet

$$x - y + z = 1 - (2) + (-1) = -2$$

$$\underline{x - y + z = -2}$$



Setter inn de parametriserte punktene for line 1 (a) i likningen fra linje 2

$$\underbrace{(1+2s+t)}_{x} + \underbrace{(2+s)}_{y} + \underbrace{(-1-s-t)}_{z} = 0$$

$$2 + 2s + 0 \cdot t = 0$$

løsning $\underline{s=-1}$ alle t.

$$\begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= 1 \\ z &= -t \end{aligned}$$

parametriserer snittlinjen

$$\left(\begin{aligned} &[x, y, z] = \\ &[-1, 1, 0] \\ &+ t[1, 0, -1] \end{aligned} \right)$$

5 a) - Skriv opp de 5 første leddene i den geometriske rekken som starter med 6 og som har kvotient $-1/3$.

- Finn summa til den uendelige geom. rekken (hvis den finnes).

$$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - + \cdots$$

$$= 6\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - + \cdots\right)$$

$(a_{n+1} = k\,a_n)$

konvergerer fordi kvotient $|-1/3| = \frac{1}{3} < 1$

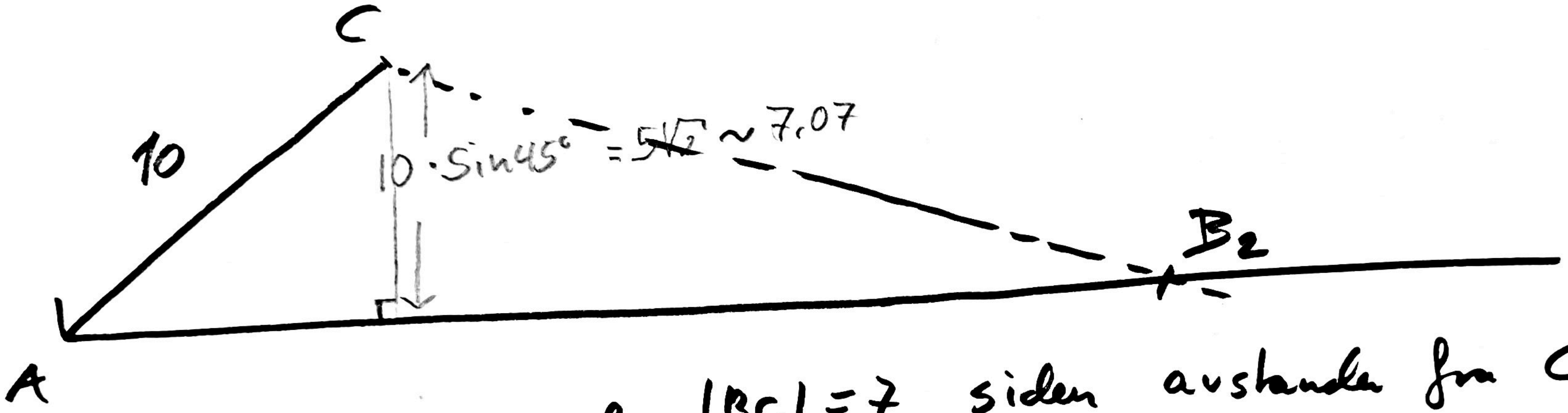
Summen er lik $6 \cdot \dfrac{1}{1-k} = 6 \dfrac{1}{1-(-1/3)}$

$$= 6 \cdot \frac{1}{4/3} = 6 \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{9}{2}} = 4.5$$

Finn lengden AB til trekantene slik at

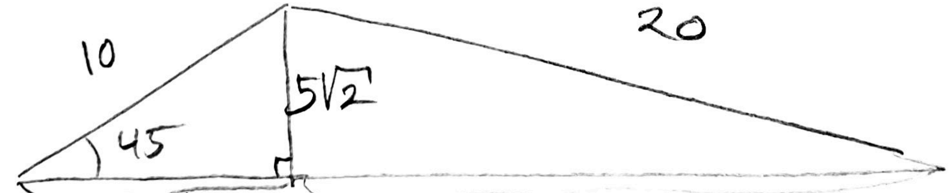
$\angle A = 45^0$ $\quad |AC| = 10$

1) $|BC| = 7$ $\qquad$ 2) $|BC| = 20$



1) ingen Δ med $|BC| = 7$ siden avstanden fra C til horisontal linje. er $10 \sin 45^\circ > 7$.

2)



$10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2}$ $\qquad \sqrt{20^2 - (5\sqrt{2})^2}$

$$|AB| = 5\sqrt{2} + \underbrace{\sqrt{400 - 50}}_{18.708\ldots} = 5\sqrt{2} + \sqrt{350} \approx \underline{25.779}$$

Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	1. desember 2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	8 (20 deloppgaver)
Antall sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal dere løse likninger. Alle svarene skal gis med **eksakte** verdier.

a) Løs den lineære likningen (eksakt!)

$$11{,}1x - 1{,}3 = \frac{2}{7}.$$

b) Løs den kvadratiske likningen

$$3x^2 + 7x = -4.$$

c) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y + 2x &= 4\,. \end{aligned}$$

d) Finn alle løsningene til likningen

$$4\cos^2 v = 3$$

slik at $0 < v < 2\pi$ (radian).

$4u^2 = 3$

$u^2 = \frac{3}{4}$

$u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

e) Løs likningen $\sqrt{3 + 2x} + x = 0$.

$\sqrt{3+2x} = -x$

kvadrere begge sider.

$3+2x = x^2$

Oppgave 2

$\sin v(2\cos v - 1) \geq 0$

I denne oppgaven skal dere løse ulikheter.

$2\sin v \cos v - \sin v \geq 0$

a) Finn alle løsningene til ulikheten

$$2\sin(v)\cos(v) \geq \sin(v)$$

slik at $-180° \leq v \leq 180°$. $\sin(2v) \geq \sin(v)$

b) Løs ulikheten

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} \leq 0.$$

Oppgave 3

Vi har tre punkter i rommet: $A(2,1,1)$, $B(1,2,-4)$ og $D(-2,1,6)$.

a) Finn vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$. Anta at C er et punkt slik at $ABCD$ er et parallellogram. Bestem koordinaten til C.

b) Bestem vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$.

Bestem arealet til parallellogrammet $ABCD$.

c) Et punkt T har koordinater (3,1,2). Bestem volumet til pyramiden med grunnflate $ABCD$ og topp i T.

Oppgave 4

a) Et plan i rommet er parametrisert som følger

$$\begin{aligned} x &= 2s \\ y &= 4 - s \\ z &= 1 + 4s + t\,. \end{aligned}$$

Finn en likning som beskriver dette planet (løsningsmengden er planet).

b) Parametriser linjen som er snittet mellom planet i forrige deloppgave og planet gitt ved $x - y + 2z = 4$. (Linjen består av alle punktene som ligger i begge planene.)

Oppgave 5

a) Skriv opp de fem første leddene i den uendelige geometriske rekken som starter med 1 og som har kvotient lik $-1/2$. Bestem summen av den uendelige rekken (hvis den eksisterer).

b) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3.

c) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 eller med 7.

Oppgave 6

a) Bestem alle trekanter ABC slik at AB har lengde 10, vinkel A er lik 30° og BC har lengde 6. Finn lengdene til alle sidene i trekantene.

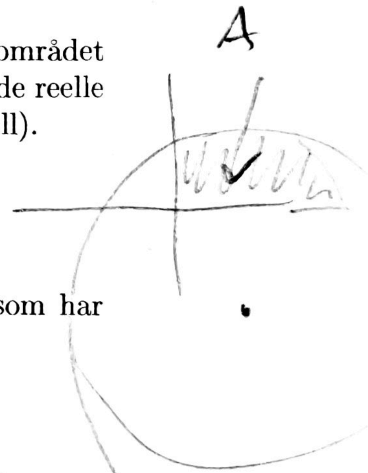
b) Bestem antall mulige trekanter ABC slik at vinkel A er lik 30°, lengden til AB er lik 10 og lengden til BC er lik a. (Svaret avhenger av verdien til $a > 0$. Beskriv antallet som en funksjon av a.)

$(x-2)^2 - 4 + (y+4)^2 - 16$

Oppgave 7

a) Grafen til likningen $x^2 + y^2 = 4x - 8y$ er en sirkel. Bestem koordinatene til senteret til sirkelen samt radius til sirkelen.

b) Sirkelen i a) går gjennom origo. Regn ut arealet til den delen av (området inni sirkelen) som ligger i første kvadrant (det er den delen av de reelle planet hvor både x og y koordinatene er større enn eller lik null).



Oppgave 8

Finn radien R til den minste kulen som inneholder en kjegle som har høyde h og en sirkulær grunnflate med radius r.