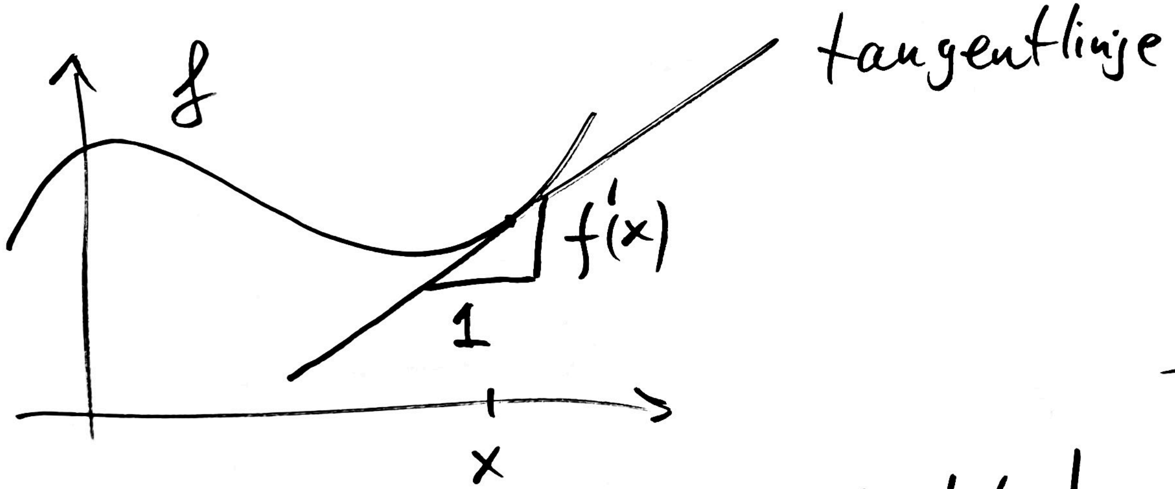
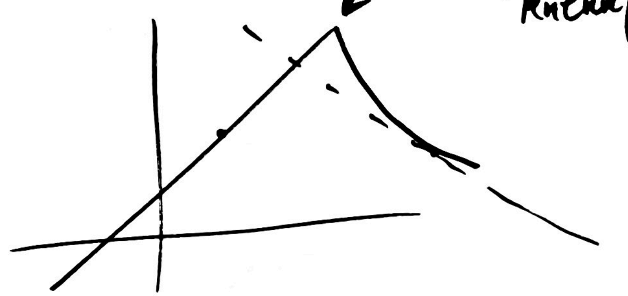
11.01.2022 Kap 6.6 - 9 denne uken

1

Derivasjon





$f'(x)$ er stigningstallet til tangentlinjen til $f(x)$ i x

$f'(x)$ er en funksjon tilordnet f.

sett på eksempler i geogebra
kommando: Derivert (...)

Å finne derivert er et "håndverk".

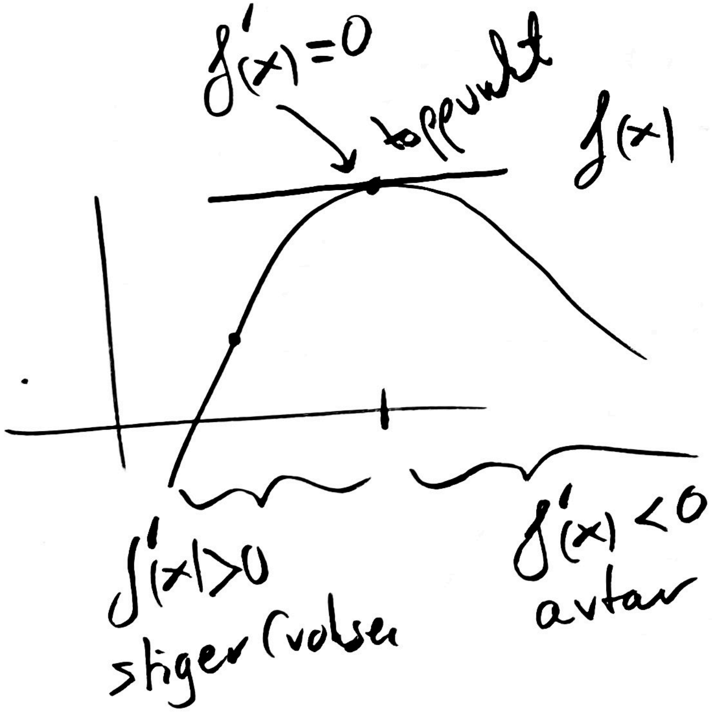
Senere skal vi se på (ubestemte) integraler

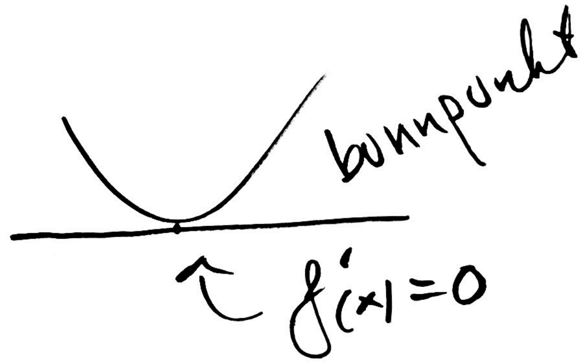
(2)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{"antiderivert"}$$

slik at $F'(x) = f(x)$

Dette er typisk vanskelig.





$f'(x)$ sier noe om hvordan funksjonen endrer seg når x varieres.

3

$S(t)$ posisjon ved tiden t

$$S'(t) = V(t) \quad \text{fart}$$

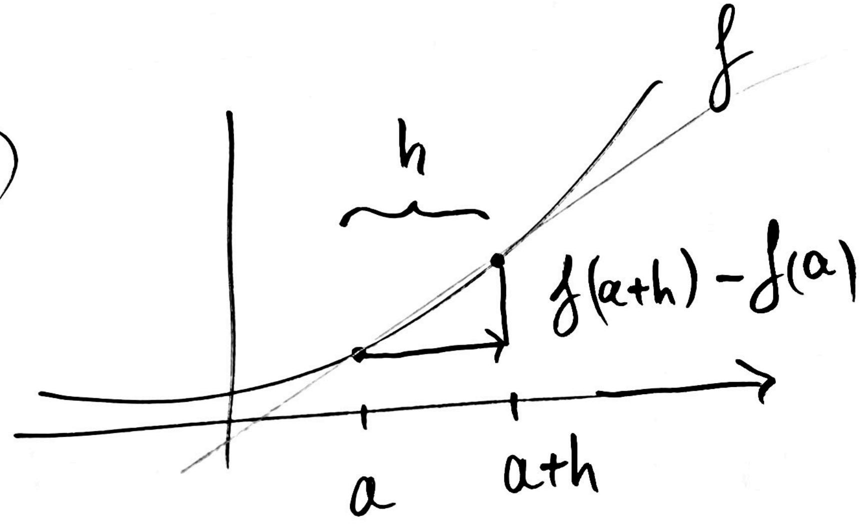
Anta $V(t)$ er kjent.

Avstanden vi har forflyttet oss fra t_0 til T

$$S(T) - S(t_0), \quad \text{hvor} \quad S'(t) = V(t)$$

$$= \int_{t_0}^{T} V(t)\,dt$$

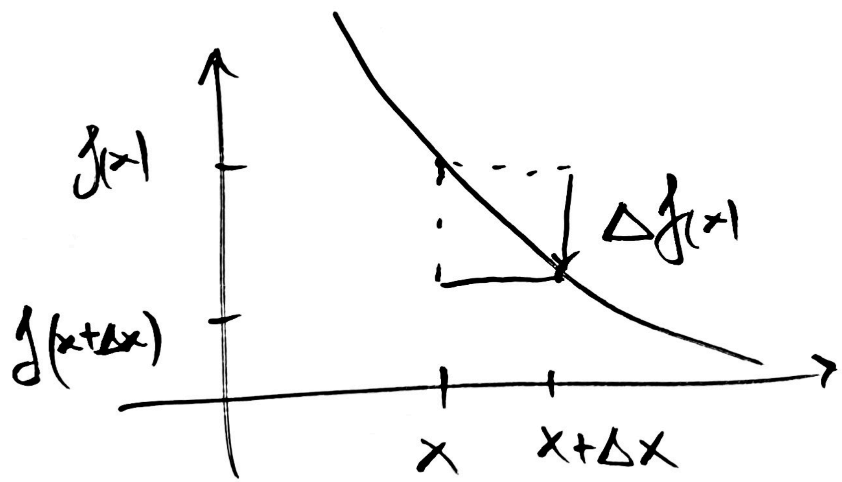
(4)



sekant linje (går gjennom to punkt på grafen)

Stignings tallet til sekantlinjen gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$

er $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Δx pos og neg.
$\neq 0$

Stigningstallet til sekantlinje.

er $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

Δx liten endring i x

5

Definisjon av den deriverte

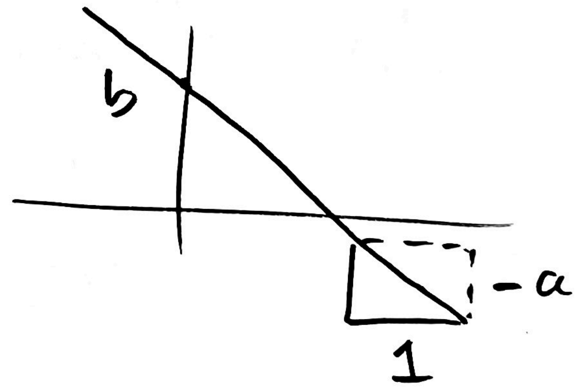
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h = \Delta x$

$$\left(f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Den deriverte behøver ikkje eksistere i alle punkt.

Eks. $f(x) = ax + b$



Fra definisjonen:

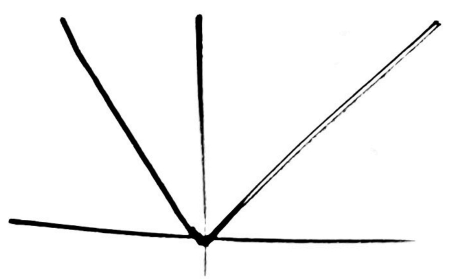
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)+b-(a \cdot x+b)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} a = \underline{a}$$

6

$$\boxed{(ax+b)' = a}$$

Hva er $g'(x)$ når $g(x) = |x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



$|x|$

Forventer $g'(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

Bruker definisjonen av den deriverte:

$x<0$ $\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

avgrense til
$|h| < |x|$
$x+h < 0$

(7)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1$$

$$= -1. \qquad x<0$$

Tilsvarende: $x>0$ avgrense h slik at $x+h>0$

$|h| < x$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Hva skjer i $x=0$, $\lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h}$?

høyre og venstre grense: $\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1$

Så $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|-0}{h}$ eksisterer ikkje.

8

$g(x) = |x|$ er <u>ikkje deriverbar</u> i $x = 0$.

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ikkje deriverbar i $x = 0$.

$D_g = \mathbb{R}$ $\qquad D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

definisjonsmengden til g' er ekte mindre enn def. mengden til g.

Definisjon:

x er et **knekkpunkt** for $f(x)$

hvis

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer

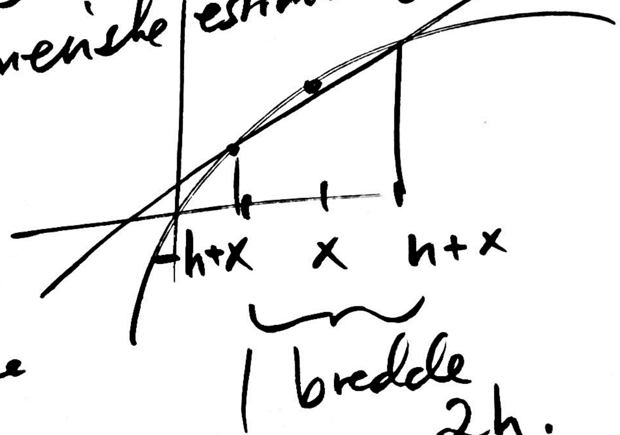
høyre derivert i x $\neq$ venstre derivert i x

typiske knekkpunkt

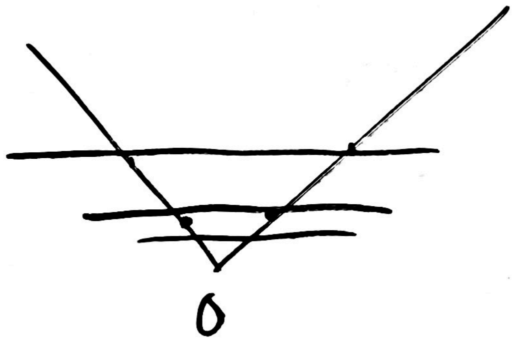
(9)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

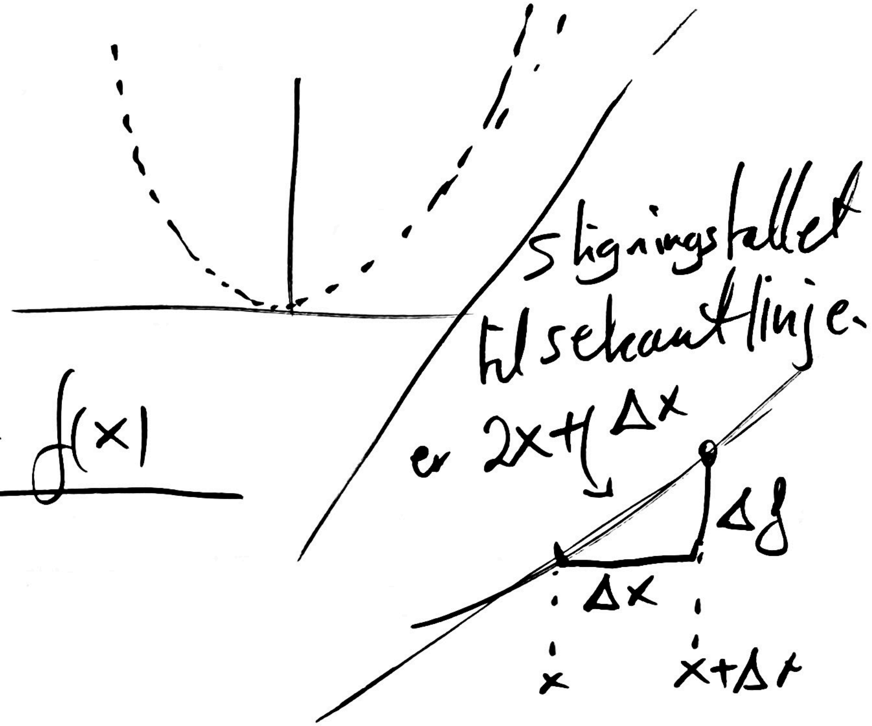
(fungerer fint til numeriske estimat for $f'(x)$)



Dette gir 0 for funksjonen $|x|$ i $x=0$.



$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$



Fra definisjonen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

10

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = \underline{2x}$$

$$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$$

11

Fra def. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2+bx+c)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a(2xh+h^2) + b\cdot h + 0}{h} = \lim_{h\to 0} a(2x+h)+b$$

$$= \underline{2ax+b} \quad ✓$$

Derivasjon er lineær: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(respekterer skalarmultiplikasjon og addisjon) $(af(x))' = a\cdot f'(x)$

a konstant.

(12)

$$(ax^2+bx+c)' = a(x^2)' + (bx+c)'$$

benytter linearitet

$$= a \cdot 2x + b$$

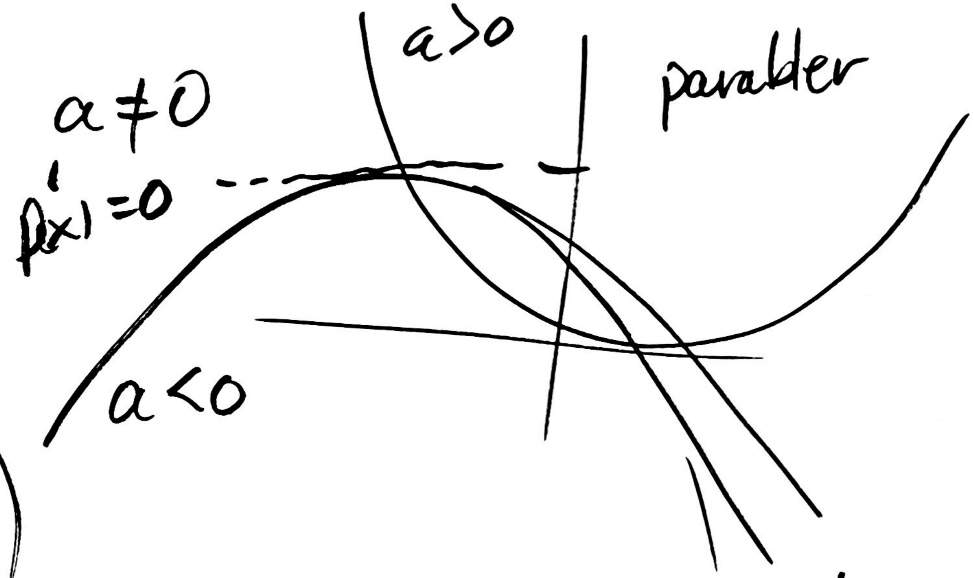
$$= \underline{2a \cdot x + b}$$

Eksempel $p(x) = ax^2+bx+c$

Fullføre kvadratet:

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$



gir topp/bunnpunkt når $x + \frac{b}{2a} = 0$: $\underline{x = \frac{-b}{2a}}$

Den deriverte $p'(x) = 2ax+b = 0$: $\underline{x = \frac{-b}{2a}.}$