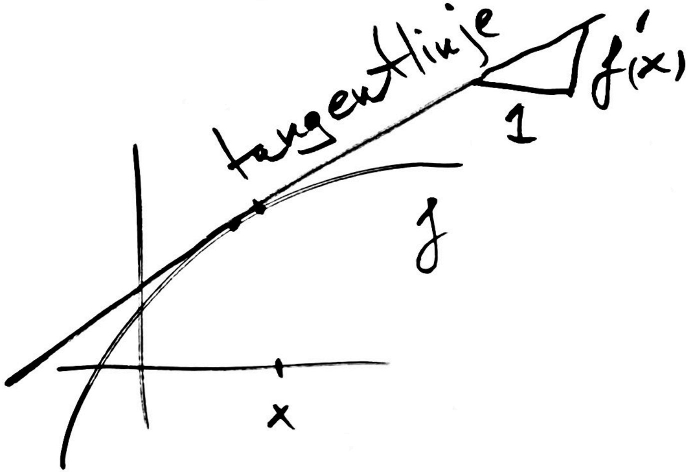
12.01.2022 Derivasjon. $(x^n)' = n x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

f funksjon, den deriverte $f'(x)$ ny funksjon



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Leibniz notasjon for den deriverte

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

6.6 Vekstfart (gjennomsnittlig) (Endringsraten) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ | momentan Vekstfart (Endringrate) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

sum av to funksjoner

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

k konstant.

skalering av en funksjon.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

produkt av to funksjoner

Polynomer er bygd opp av $1 = x^0$ og x ved produkt, sum og skalering.

$$p(x) = x^3 - 3x + 1 = x \cdot x \cdot x + (-3 \cdot x) + 1$$

<u>Derivasjon er lineær</u>

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = (f' + g')(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x) \qquad k \in \mathbb{R}$$

bevis: Fra definisjonen

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

(grensesetning)

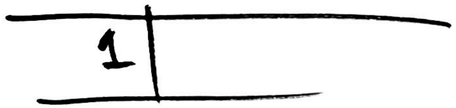
$$= f'(x) + g'(x)$$

Tilsvarende

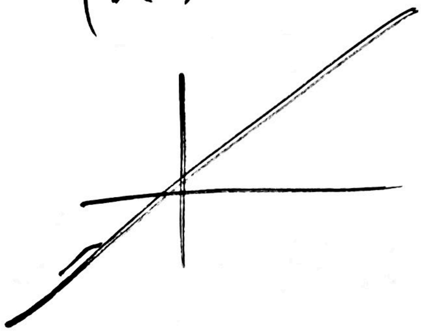
$$(kf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k f(x+h) - k f(x)}{h}$$

$$= k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x).$$

$1' = 0$



$(x)' = 1$



$(x^2)' = 2x$

$(x \cdot x)' \neq (x)' \cdot (x)' = 1 \cdot 1 = 1$

$2x \neq 1$

så $(f \cdot g)' \neq$ produkte av $f'(x)$ og $g'(x)$

$f' \cdot g + f \cdot g' = (f \cdot g)'$

produktregelen.

$(x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x')$

$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$ ✓

$$\underline{(x^n)' = n x^{n-1}} \quad n \in \mathbb{N}$$

(kan vises ved bruk av prod. regelen og induksjon på n)

$$(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4 \qquad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$(x^{123})' = 123 \cdot x^{123-1} = 123x^{122} \qquad \text{"}(x^0)' = 0 \cdot x^{-1} = \text{"}$$

$$* \quad (4x^5 - 2x^3 + 1)' = (4x^5)' + (-2x^3)' + (1)'$$

$$= 4(x^5)' - 2(x^3)' + (1)'$$

$$= 4(5x^4) - 2(3x^2) + 0 \quad = \underline{20x^4 - 6x^2}$$

Oppg Finn $(-7x^4 + \sqrt{2}x^2 - 3x + \pi)'$

$$= -7(x^4)' + \sqrt{2}(x^2)' - 3(x)' + \pi(1)'$$

$$= -7 \cdot (4x^3) + \sqrt{2}(2x) - 3(1 \cdot x^0) + \pi(0)$$

$$= -28x^3 + 2\sqrt{2}\cdot x - 3$$

eks $$(-8x^5 + 7x - \sqrt{37})' = -8(5x^4) + 7\cdot 1$$
$$= -40x^4 + 7$$

oppg

1) $-x^4 + 17x^6 + 3(x^2 - x)$ Finn de deriverte.

2) $x^2(4 + x^3)$

3) $(x^3)^2 - 4^2$

4) $(2x^3 - 5)^2$

1) $(-x^4 + 17x^6 + 3(x^2 - x))'$

$= -1 \cdot (x^4)' + 17(x^6)' + 3\underbrace{(x^2 - x)'}_{(x^2)' - (x)'}$

$= -1 \cdot 4x^3 + \overbrace{17 \cdot 6}^{60+7 \cdot 6} \cdot x^5 + 3(2x - 1)$

$= \underline{102x^5 - 4x^3 + 6x - 3}$

2) $(x^2(4 + x^3))' = (4x^2 + x^5)'$

$= 4(x^2)' + (x^5)' = 4 \cdot 2x + 5x^4$

$= \underline{5x^4 + 8x}$

3) $((x^3)^2 - 4^2)' = (x^6 - 4^2)' = \underline{6x^5}$

4) $((2x^3 - 5)^2)' = ((2x^3)^2 + (-5)^2 + 2(-5)(2x^3))'$

$$\Big(4x^6 + \underbrace{(-5)^2}_{\text{konstant}} - 10\cdot 2x^3\Big)'$$

$$= 4(x^6)' - 20(x^3)' + \underbrace{\left((-5)^2\right)'}_{0}$$

$$= 4\cdot 6x^5 - 20\cdot 3x^2$$

$$= \underline{24x^5 - 60x^2}$$

$$(ax+b)'$$

$$= a\cdot 1 + (b)'$$

$$= a.$$

a, b parametre
uendret under endringa i x
opptrer som konstanter

$f(x) = x^3 - 3x + 1.$

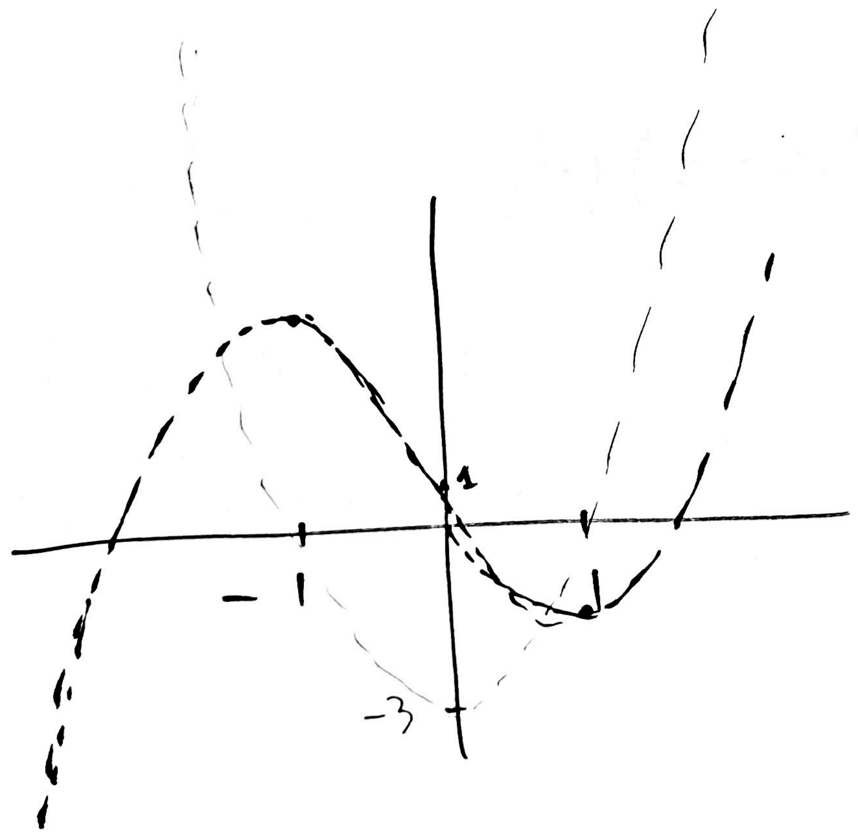
$f'(x) = (x^3)' + (-3)(x)' + (1)'$

$3x^2 - 3x' = \underline{3(x^2-1)}$

$f'(x) = 0$ når $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1.$



$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

$= -1 + 3 + 1$

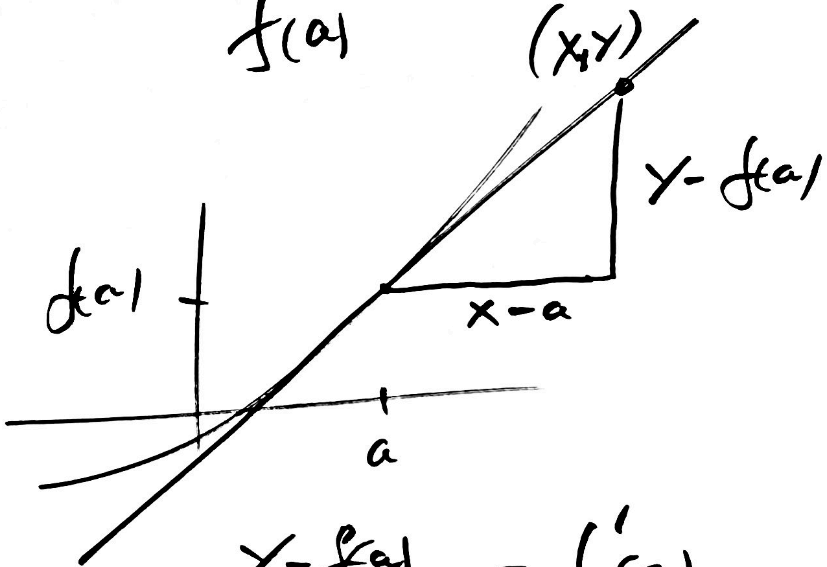
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$

Ser på tangentlinjen til $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

i $(a, f(a))$

stigningstallet er $f'(a) = 3(a^2-1)$

Tangentlinjen er linjen gjennom punktet $(a, f(a))$ med stigningstall $f'(a)$



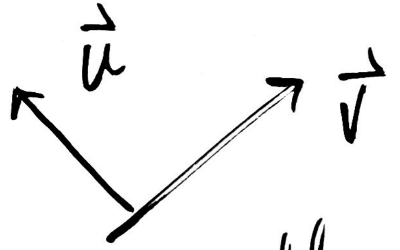
$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

stigningstallet

For $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$\underline{y = 3(a^2-1)(x-a) + a^3 - 3a + 1}$$



$\vec{u}$ normal vektor til $\vec{v}$

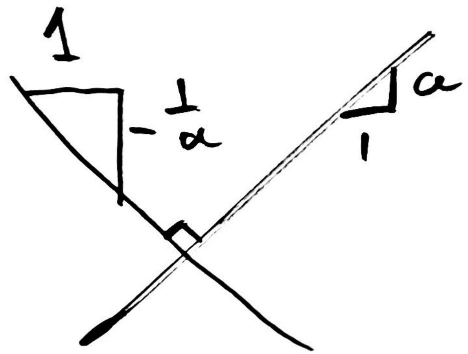
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{v} = [1, a]$ a "stigningstallet"

$\vec{u} = [-a, 1]$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(-a) + a \cdot 1 = 0$

alle a



stigninstallet til en linje

parallell til $\vec{v} = [-a, 1]$

er $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$

$a \neq 0$

vertikal

normallinje

$a = 0$

Normallinje til tangentlinjen til $f(x) = x^3 - 3x + 1$ i $(a, f(a))$ er

$$y = \underbrace{\frac{-1}{3(a^2-1)}}_{\frac{-1}{f'(a)}} (x - a) + f(a) \qquad a \neq \pm 1$$

Finn tangent og normallinje til $g(x) = -x^4 + 2x$ for ulike verdier a av x.

(omhandlet i boken i 6.7)

$$g'(x) = -1(x^4)' + 2(x)' = \underline{-4x^3 + 2}$$

Tangentlinjen $y = (-4a^3 + 2)(x - a) - a^4 + 2a$

Normallinjen $y = \frac{-1}{-4a^3 + 2}(x - a) - a^4 + 2a$.

Beviser formelen $(x^n)' = n x^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$$

$$(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}\cdot a+b^{n-3}\cdot a^2+\cdots+b\cdot a^{n-2}+a^{n-1})$$

$$= b^n - a^n$$

n=2 konjugatsetningen.
utvida konjugatsetningen

Fra det

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x}$$

benytter den utvida konjugatsetningen med $b = x+h$ og $a = x$

$$(x^n) = \lim_{h\to 0}\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)$$

grensesetningene

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n} = \underline{\underline{n x^{n-1}}}$$