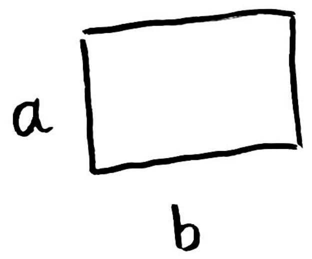
7.4-5 Optimering

19 jan. 2022



Hvilke forhold $\frac{a}{b}$ gir størst areal når omkretsen har lengde L.

Arealet $A = a \cdot b$

Omkrets $2(a+b) = L$ fast.

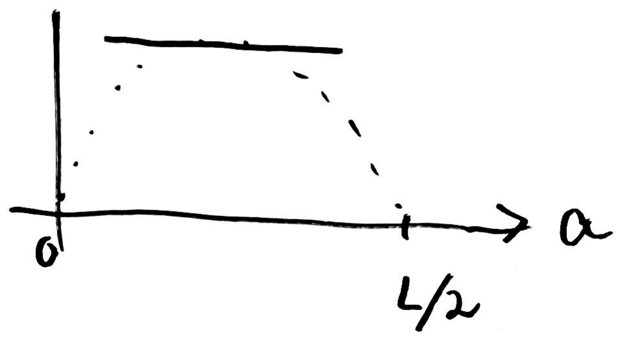
$a + b = (L/2)$

så $b = \left(\frac{L}{2}\right) - a$

Setter inn i uttrykket for arealet:

$A = a\left(\frac{L}{2} - a\right)$ funksjon av én variabel a.

Ønsker å finne a slik at A blir ~~minst~~ størst mulig.



Deriverer $A(a) = a \cdot \frac{L}{2} - a^2$

$$A'(a) = \frac{L}{2} - 2a$$

$$A'(a) = 0 = \frac{L}{2} - 2a$$

gir $a = \frac{L}{4}$

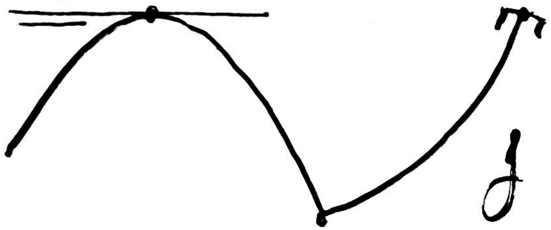
Da må $b = \frac{L}{2} - a = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}.$

Så arealet er størst mulig når $\underline{a = b}$; vi har da et kvadrat.

Ekstremal punkt: topp- og botnpunkt.

$f' = 0$ stasjonære

endepunkt.



f ikkje deriverbar

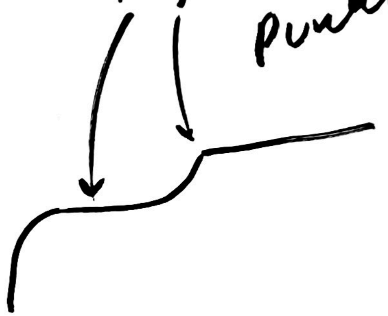
Kritiske punkt:

- endepunkt
- punkt hvor funksjonen ikkje er deriverbar
- punkt hvor $f' = 0$ (stasjonære punkt)

Alle ekstremalpunkt er kritiskepunkt

Så tilstrekkelig å sjekke blant kritiskepunkt.

ikkje topp/bunn. punkt



ikkje topp/bunnpunkt

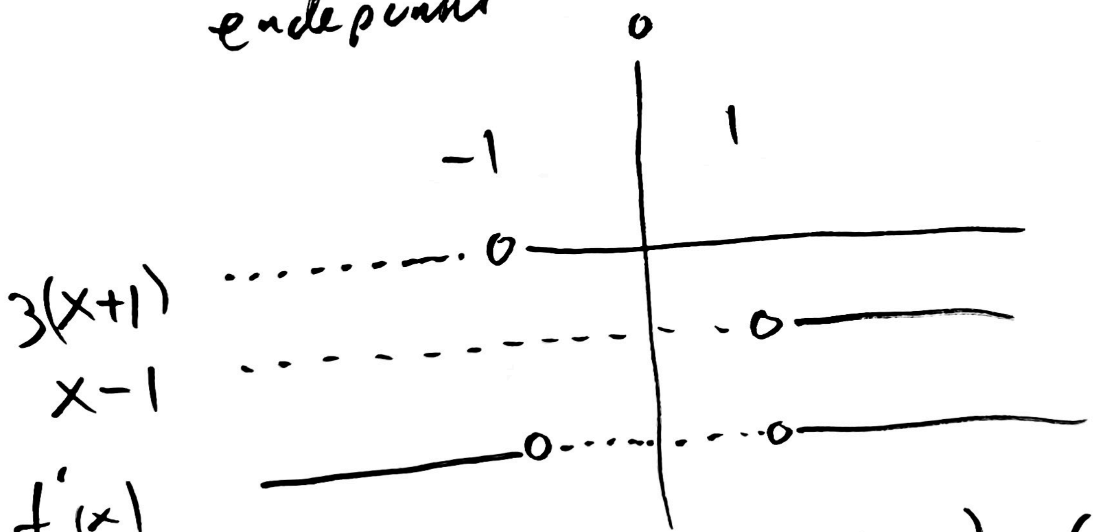
Eks $f(x) = x^3 - 3x$ $\qquad D_f = \langle -2, 0]$

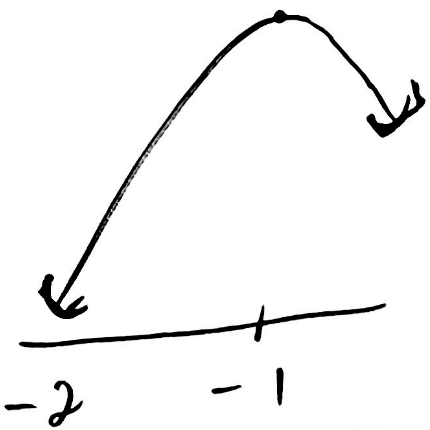
$f'(x) = 3x^2 - 3 = \underline{3(x^2-1)} = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

stasjonært punkt for $\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right\}$ kritiske punkt.

endepunkt





Toppunkt i $(-1, f(-1)) = \underline{(-1, 2)}$ globalt

Bunnpunkt i $\underline{(0,0)}$ (ikkje globalt)

Finn kritiske punkt og ekstremal punkt til $g(x) = x^2 + 4x$ $D_g = [-4, 4]$.

$g'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$ deriverbar

$g'(x) = 0 \iff x+2=0 \iff x = -2.$

Kritiske punkt: $x = -4$, $x = -2$

$x = 4$

$g'(x)$ - - - - - $\underset{-2}{\circ}$ ———————

Toppunkt: $\underline{(-4, 0)}$ og $\underline{(4, 32)}$ globalt

Bunnpunkt: $\underline{(-2, -4)}$ globalt.

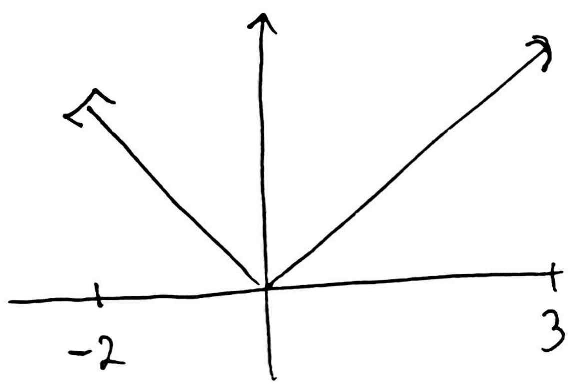
$g(-4) = -4(-4+4) = 0$

$(g(x) = x(x+4)$, $g(-2) = -2(-2+4) = -4$

$g(4) = 4(4+4) = 32$.

Finn ekstremalverdier til $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$D_f = [-2, 3\rangle$.



$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

ikkje deriverbar i $x = 0$, men kontinuerlig

$f'(x) \neq 0$ for alle x

ingen stasjonære punkt

Kritiske punkt i $x = -2$ og $x = 0$.

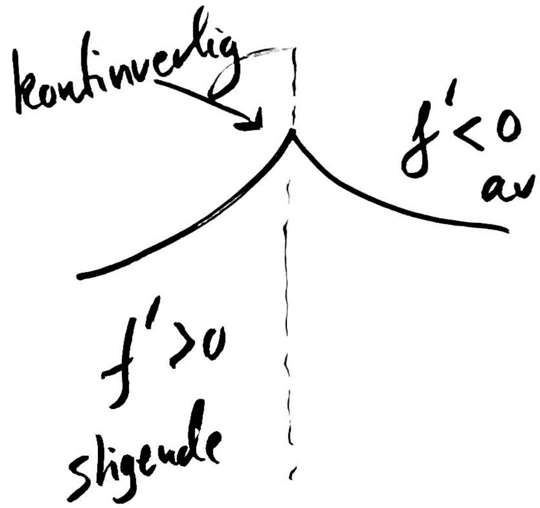
$f(x)$ avtagende for $x < 0$

stigende — $x > 0$

Toppunkt: $(-2, 2)$ ikkje globalt ($f(2.5) = 2.5 > 2$)

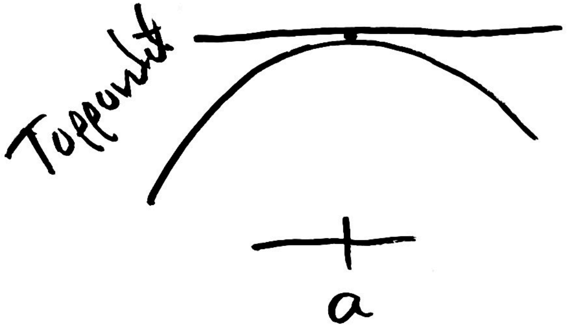
Bunnpunkt $(0, 0)$ globalt.

1. derivert testen



toppunkt.

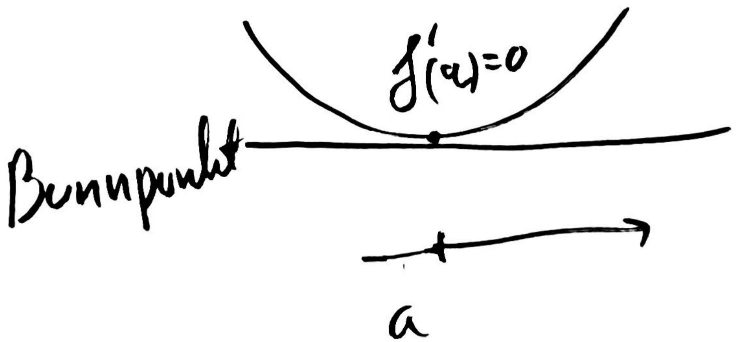
2. derivert testen



$f'(a) = 0$

$f''(a) < 0$

konkav ned



$f'(a) = 0$

$f''(a) > 0$

konkav opp

Oppg. $f(x) = x^3 - x + 1$ (2. derivert testen)

Finn ekstremalpunkt

$f'(x) = 3x^2 - 1$

ingen endepunkt
deriverbar

Kritiske punkt: $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0$

$\iff x^2 = 1/3$

$\iff x = \pm 1/\sqrt{3}$.

$f''(x) = 6x$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $f''(x) > 0$ og $f'(x) = 0$

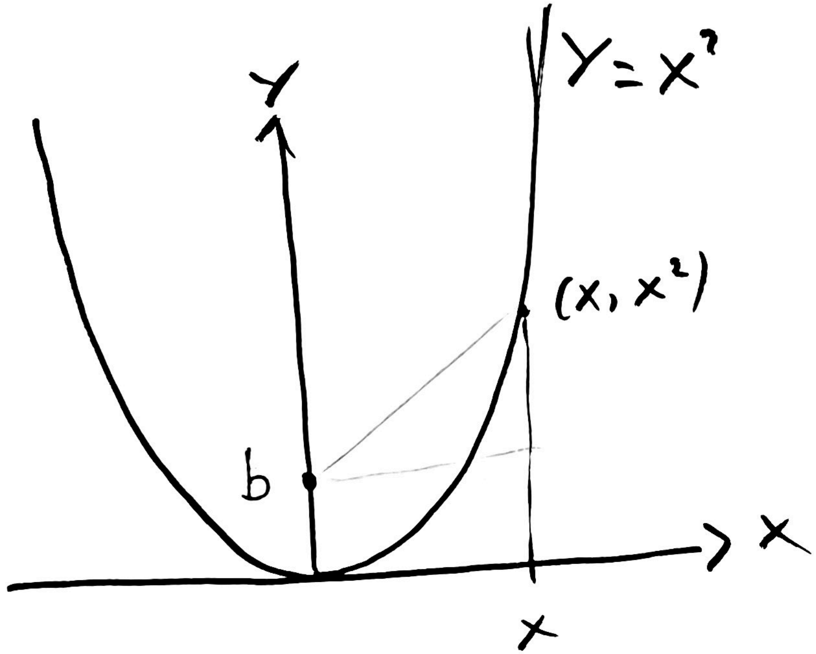
Bunnpunkt i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$

$= \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}} + 1\right)}$

Toppunkt

$x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $f''(x) < 0$, $f'(x) = 0$ så topp i $\underline{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)}$



Hva er korteste avstand fra b til grafen til $y = x^2$?

Avstanden mellom $(0,b)$ og (x, x^2) er

$$A(x) = \sqrt{(x^2-b)^2 + x^2}$$

$A > 0$, A er minst når A^2 er minst.

$\underline{x \geq 0}$

$$A^2(x) = (x^2-b)^2 + x^2$$

Finner ekstremalverdier.

$$(A^2(x))' = (x^4 - 2bx^2 + b^2 + x^2)'$$

$$= 4x^3 - 2b(2x) + 2x$$

$A^2(0) = |b|^2$

$(A^2(x))' = 0$ $\quad 4x^3 + (-2b+1)2x = 0$

$2x(2x^2 + (1-2b)) = 0$

$x = 0$ eller $2x^2 + (1-2b) = 0$

$x^2 = \frac{2b-1}{2} = \underline{b - \frac{1}{2}}$

$x = \sqrt{b - 1/2}$ for $b \geq \frac{1}{2}$.

$x = 0$ $\quad A^2(0) = \underline{b^2}$

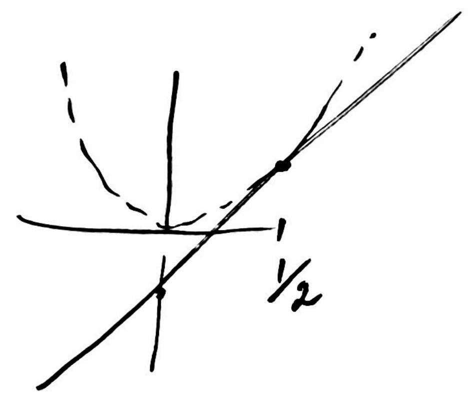
$x = \sqrt{b - 1/2}$ $\quad A^2(x) = (x^2 - b)^2 + x^2 = (b - \frac{1}{2} - b)^2 + (b - \frac{1}{2})$

$= (-\frac{1}{2})^2 + b - \frac{1}{2} = \underline{b - \frac{1}{4}}$ $\quad (\geq 0)$ for $b \geq \frac{1}{2}$

$b - \frac{1}{4} \leq b^2$ når $b \geq \frac{1}{2}$

$0 \leq b^2 - b + \frac{1}{4}$

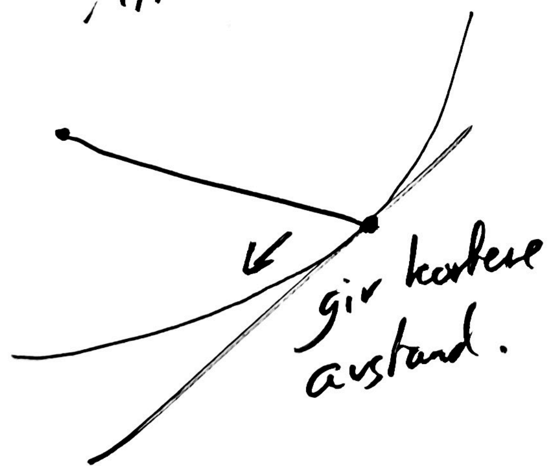
$0 \leq (b - \frac{1}{2})^2$

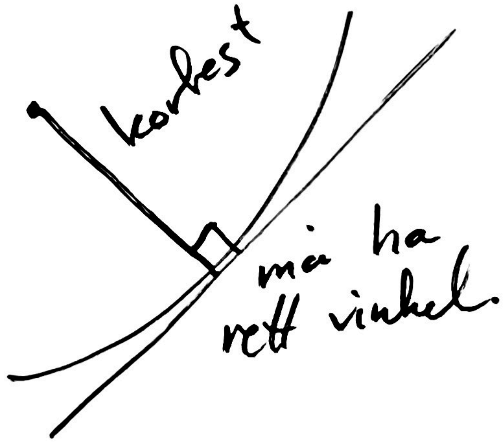


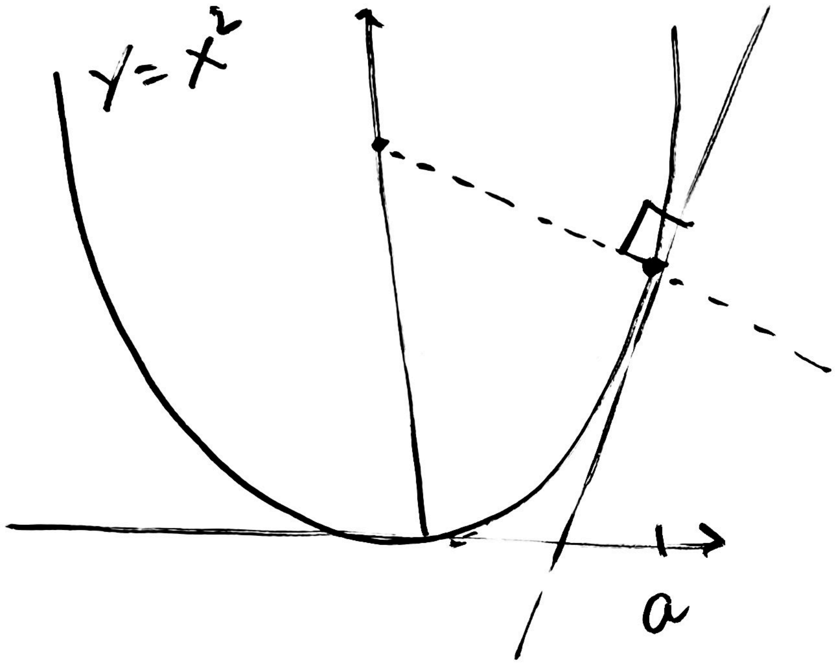
Korteste avstand mellom grafen til $y = x^2$
og $(0, b)$ på y-aksen

er $\begin{cases} |b| , & b \leq \frac{1}{2} \quad \text{i } (0,0) \\ \sqrt{b - \frac{1}{4}} & b \geq 1/2 \quad \text{hvor } x = \pm\sqrt{b - 1/2} \end{cases}$

Alternativ løsning av problemet







normal linje til tangentlinjen i (a, a^2) :

Tangentlinjen har stigningstall $2a$.

Normallinjen har stigningstall

$$\frac{-1}{2a}$$

Normallinjen gjennom (a, a^2)

$$y = \frac{-1}{2a}(x-a) + a^2 .$$

Normallinjen treffer y-aksen i $(0, b)$

$$b = \frac{-1}{2a}(0-a) + a^2 = \frac{1}{2} + a^2$$

$$b = \frac{1}{2} + a^2$$

$$a = \pm\sqrt{b - \frac{1}{2}} \,. \qquad b \geq \frac{1}{2}$$

Hvis $b \leq \frac{1}{2}$ er $(0,0)$ nermest $(0,b)$.