25.01.2022

Fysisk undervisning onsd. og tors.

7.6 Kjerneregelen

sammensatte funksjoner

$(x^3+1)^5$ sammensatt funksjon

først $u(x) = x^3+1$

så $f(x) = x^5$

$(x^3+1)^5 = f(u(x))$

først u så f.

$f(u(x))$

$\uparrow$ ytre funksjon

$\uparrow$ kjerne (indre funksjon)

$f(u(x)) = f \circ u(x)$

$f \circ u$ sammensatte funksjon

Alternativ skrive måte

$\sqrt{1+3x} = f(u(x))$

ytre: $f(x) = \sqrt{x}$

kjerne: $u(x) = 1+3x$

$(1+\sqrt{x})^3 = f \circ u(x)$

ytre: $f(x) = x^3$

indre: $u(x) = 1+\sqrt{x}$

Sammensetning av 3 funksjoner

$f(x) = x^3$

$\left.\begin{array}{l} k(x) = 1+x \\ u(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} k \circ u(x) = 1+\sqrt{x}$

$(1+\sqrt{x})^3 = f(k(u(x)))$

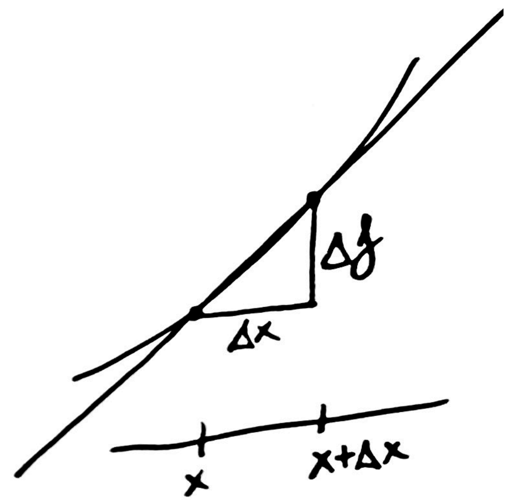
$$g(x) = \frac{4}{(2+5x)^3}$$

Opg. Skriv $g(x)$ som en sammensetning av enklere funksjon.

$h(x) = 4 \cdot x^{-3}$ ytre funksjon

$u(x) = 2 + 5x$ kjerne.

$g(x) = h(u(x))$



Leibniz notasjon

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kjerneregelen:

$$\big(f(u(x))\big)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$\frac{d(f \circ u)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\underline{f'(u(x))} \cdot \underline{u'}$$

$$\left((x^3+1)^5\right)' = 5(x^3+1)^4 \cdot (x^3+1)'$$
$$= 5(x^3+1)^4 \cdot (3x^2+0)$$
$$= 15x^2(x^3+1)^4$$

$f(u(x))$

$$f(x) = x^5$$
$$u(x) = x^3+1$$
$$f'(x) = 5x^4$$
$$u'(x) = 3x^2$$

$$\left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$
$$5(u(x))^4 \cdot (3x^2) \ldots$$

$$\left(\sqrt{1+3x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+3x}}\,(1+3x)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1+3x}} \cdot 3$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

(kladd)

Mellomregning

$$(\sqrt{x})'$$
$$= (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eeg $f(x) = (1+\sqrt{x})^3$

Finn $f'(x)$.

$$f(x) = 3(1+\sqrt{x})^2 \cdot (1+\sqrt{x})'$$

$$= 3(1+\sqrt{x})^2 \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 3(1+\sqrt{x})^2 / (2\sqrt{x})$$

$$= 3(1+\sqrt{x})$$

eg $\left(\frac{4}{(2+5x)^3}\right)' = 4\left((2+5x)^{-3}\right)'$

$$= 4\left(-3(2+5x)^{-4} \cdot (2+5x)'\right)$$

$$= -4 \cdot 15(2+5x)^{-4} = \underline{\frac{-60}{(2+5x)^4}}$$

Generelt : Lineær kjerne $(f(ax+b))'$

$$= f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = \underline{a f'(ax+b)}$$

opg $\left(\sqrt[4]{2-x}\right)' = \left((2-x)^{1/4}\right)'$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{(2-x)^3}} \cdot \underbrace{(2-x)'}_{-1}$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt[4]{(2-x)^3}}$$

$$(x^{1/4})' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$$

$$= \frac{1}{4}x^{-3/4}$$

$$= \frac{1}{4}\left((x^3)^{1/4}\right)^{-1}$$

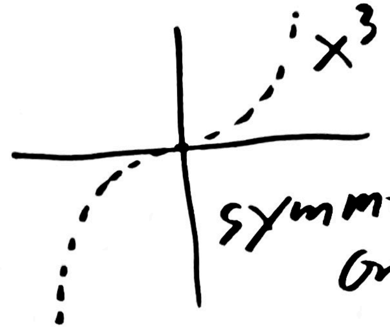
$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\left(f(-x)\right)' = f'(-x)\cdot\underbrace{(-x)'}_{-1}$$

$$\left(f(-x)\right)' = -f'(-x)$$

$f(x)$ er en <u>odde</u> funksjon

hvis $f(-x) = -f(x)$



symmetrisk om origo

Eksempel

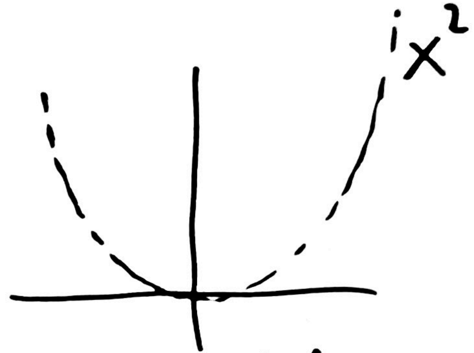
$x,\ x^3,\ x^5$

x^n n oddetall

$\sin x$

$f(x)$ er en <u>jevn</u> funksjon

hvis $f(-x) = f(x)$



symmetrisk om y-aksen

$2,\ x^2,\ \frac{1}{x^2},\ x^4$

x^n n <u>jevntall</u>

partall

$\cos x$

Dg symmetrisk om y-aksen

Resultat: Den <u>deriverte</u> til en jevn funksjon er odde

odde ——— jevn

$(x^n)' = n x^{n-1}$ $\qquad$ n jevn $\iff$ $n-1$ odd

$f_{odd}(-x) + f_{odd}(x) = 0$ for alle x

Deriverer og benytter $(f(-x))' = -f(x)$

$$\left(f_{odd}(-x) + f_{odd}(x)\right)' = -f'_{odd}(-x) + f'_{odd}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_{odd}(x) = f'_{odd}(-x)$$

Så $f'_{odd}(x)$ er jevn.

Tilsvarende er $f'_{jevn}(x)$ odde.

$$\left(\overbrace{2x^3 - 4x}^{\text{odde}}\right)' = \overbrace{6x^2 - 4}^{\text{jevn}}$$

oppg

skriv en vilkårlig funksjon $f(x)$ som en sum av en jevn og en odde funksjon.

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{-1}\right)'$$

$$= \frac{-1}{\left(u(x)\right)^2} \cdot u'(x)$$

$$= \underline{\frac{-u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = \underline{\frac{-1}{x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{1+x^3}\right)' = \frac{-\left(1+x^3\right)'}{\left(1+x^3\right)^2} = \underline{\frac{-3x^2}{\left(1+x^3\right)^2}}$$

Mer komplisert eksempel $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+\sqrt{x}}}$

bruker kjerneregelen 2 ganger.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \underbrace{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'}_{\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\left(1+\sqrt{x}\right)'\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$$

opg Deriver $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ $x \neq \pm 1$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{1/3}} = (1-x^2)^{-1/3}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-1/3}\right)' = \frac{-1}{3}(1-x^2)^{-\frac{1}{3}-1}(1-x^2)'$$

$$(0-2x)$$

$$= -2x \cdot \frac{-1}{3} \frac{1}{(1-x^2)^{4/3}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$$

$$= 2x/(3\sqrt[3]{(1-x^2)^4})$$