Eksponent- og logaritmefunksjoner. 8.5, 6 og 8

4.02
2022

Eksponentfunksjon $f(x) = a^x$ $\quad a > 0$, $a \neq 1$

($f(x) = x^r$: potensfunksjon)

Logaritmefunksjon $g(x) = \log_a(x)$

a^x og $\log_a(x)$ er inverse funksjoner

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad x > 0$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Eks Logaritmelikning

$$2\log(x+1) = \log(x-1) + 1$$

$$\log\left((x+1)^2\right) + \log(x-1)^{-1} = 1$$

$$\log\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}\right) = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{x-1} = 10$$

$$x^2+2x+1 = 10(x-1)$$

$$x^2-8x+11 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-4\cdot 11}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \underline{4 \pm \sqrt{5}}$$

Geogebra plotter a^x for ulike a

$\dfrac{a^{x+h} - a^x}{h}$ (tilnærming til $(a^x)'$)

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Grafen til a^x og $(a^x)'$ sammenfaller for $a \sim 2.7$.

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\text{konstant}}.$$

Vi ønsker å velge a slik at $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = 1$.

Tallet med denne egenskapen kalles Euler tallet

$e = 2.718281828\ldots$ (irrasjonalt tall)

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Naturlig logaritme $\quad \ln = \log_e$ logaritme med grunntall e.

$e^{\ln x} = x \quad , \quad \ln e^x = x$

e^x og $\ln x$ er inversfunksjoner av hverandre.

$\ln x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(e)} \quad , \quad \operatorname{Log} x = \dfrac{\ln x}{\ln(10)} \sim \dfrac{\ln x}{2.30258\ldots}$

$$a^x = (\overbrace{e^{\ln a}}^{a})^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \cdot (\ln a)})' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot (\overbrace{x \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\text{tall}}}^{\text{lineær}})'$$

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x}$$

$$(10^x)' = \ln 10 \cdot 10^x \sim (2.302\ldots) \cdot 10^x$$

$$(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x \sim 0.693147\ldots \cdot 2^x$$

Eksempel

$$(3e^{5x})' = 3(e^{5x})' = 3e^{5x}(5x)'$$

$$= 15e^{5x}.$$

$$(e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = \underline{-2x\, e^{-x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^x = (e^{-1})^x = e^{-x}$$

Grafene til e^x og $\left(\frac{1}{e}\right)^x$ speiles om Y-aksen

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)'$$

$$= \underline{-e^{-x}}$$

Deriver

1) e^{-3x} , $(e^{-3x})' = e^{-3x} \cdot (-3x)'$
$= \underline{-3e^{-3x}}$

2) $e^{1/x}$ $(e^{1/x})' = e^{1/x} \cdot (\frac{1}{x})' = \underline{\frac{-1}{x^2} e^{1/x}}$

3) $x e^{2x}$ $(x e^{2x})' = (x)' e^{2x} + x (e^{2x})'$
$= 1 \cdot e^{2x} + x (e^{2x} \cdot (2x)')$
$= \underline{2x e^{2x} + e^{2x}}$.

$e^x = \exp(x)$ alternativ notasjon

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$e^{\ln x} = x$ $\qquad$ $\ln x = y$ kjerne

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln x}\right) = \frac{d\,e^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

kjerneregelen

$$1 = e^y \cdot \frac{d \ln x}{dx}$$

Så $\underline{\frac{d \ln x}{dx}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\frac{1}{x}}$

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln(a)}$$

$$\underline{\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\left(\ln(2x+1)\right)' = \frac{1}{2x+1}\cdot(2x+1)'$$
$$= \underline{\frac{2}{2x+1}}$$

opg:

$$\left(\ln(2x) - \ln x\right)' = (\ln(2x))' - (\ln x)'$$
$$\frac{1}{2x}(2x)' - \frac{1}{x} = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

for alle $x > 0$.

$$\ln 2x - \ln x = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

konstant...

opg

$$(x \ln x)' = (x)' \ln x + x \cdot (\ln x)'$$
$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) + 1$$

$$\underline{(x\ln(x) - x)' = \ln(x)}.$$

$\ln(-x)$ nat. def. mengde $x < 0$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)'$$
$$= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \underline{\frac{1}{x}}$$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ alle $x \neq 0$.

x^x $x > 0$

$1^1 = 1$
$2^2 = 4$
$3^3 = 27$
$4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = 256$
$\vdots$

$$x = e^{\ln x}$$

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \cdot \ln x}$$

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)'$$

$$= e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

$$= \underline{\ln x \cdot x^x + x^x}$$

øving

8.129 d) $\dfrac{(3^{2x}+3)(2^{3x}-5)}{x-4} = 0$

$\Leftrightarrow (3^{2x}+3)(2^{3x}-5) = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x}+3 = 0 \ \vee\ 2^{3x}-5 = 0$ (eller)

ingen løsning

$2^{3x} = 5$

$3x \log 2 = \log 5$

$x = \dfrac{\log 5}{3 \log 2} = \dfrac{\log(10/2)}{3 \log 2} = \dfrac{1-\log(2)}{3\log(2)}$

8.132 d) $10^{\log((x+2)^2)} = 10^{\log x^4}$

$(x+2)^2 = x^4 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{x^4} = 1$

$\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+2}{x^2}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow$

$x^2 + x + 2 = 0, \quad (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = 0$

$-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

Løsninger -1 og 2