8 feb 2022

8 Eksponent- og logaritme funksjoner

$(e^x)' = e^x$

e Eulertallet ≈ 2.718281828

$\ln(x) = \log_e(x)$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

a^x

$a = e^{\ln a}$ $\quad a > 0, \ a \neq 1$

$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$

$(a^x)' = e^{\ln(a) x} \cdot (\ln a \cdot x)'$

$= \ln(a) \cdot a^x$

$(10^x)' = (\ln 10) \cdot 10^x$

$(10^x)' \approx \underline{2.30 \cdot 10^x}$

$\operatorname{Log}_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ så $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{(\ln(a)) \cdot x}$

$(\operatorname{Log} x)' \approx \dfrac{1}{2.30 \cdot x}$

$\operatorname{Log} 25 + \log 4$ skriv svaret eksakt uten bruk av regnemaskin ...

$= \operatorname{Log}(25 \cdot 4) = \operatorname{Log}(100)$

$= 2$

oppg. Deriver $x e^x$

$(xe^x) = (x)' e^x + x \cdot (e^x)'$ produkt regel

$= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{(x+1)e^x}$

Deriver $(2x-1)\,e^{-3x+5}$

$$\left((2x-1)e^{-3x+5}\right)' = \underbrace{(2x+1)'}_{2}\,e^{-3x+5} + (2x+1)\underbrace{\left(e^{-3x+5}\right)'}_{e^{-3x+5}\underbrace{(-3x+5)'}_{-3}}$$

$$= \left(2 + (-3)(2x+1)\right)e^{-3x+5}$$

$$= \underline{(-6x-1)e^{-3x+5}} = \underline{-(6x+1)e^{-3x+5}}$$

Opg Deriver $\dfrac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$

$$\left(x^2 e^{-x}\right)' = (x^2)'e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)'$$

$$= 2x\,e^{-x} + x^2\left(e^{-x} \cdot \underbrace{(-x)'}_{-1}\right)$$

$$= (2x - x^2)e^{-x}$$

$$= \underline{x(2-x)\,e^{-x}}.$$

Deriver opg $\log(x^3)$

$= 3\log(x) = \frac{3}{\ln 10} \cdot \ln(x)$

$(\log(x^3))' = \frac{3}{\ln 10}(\ln(x))'$

$= \underline{\frac{3}{\ln(10) \cdot x}}$.

$\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)}$

$\left((\ln(x^3))' = \frac{1}{x^3}(x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x} \right)$

Deriver $\ln(|\ln(x)|)$

Kjerneregelen gir:

$(\ln(|\ln x|))' = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)'$

$= \underline{\frac{1}{x \ln x}}$

Minner om at

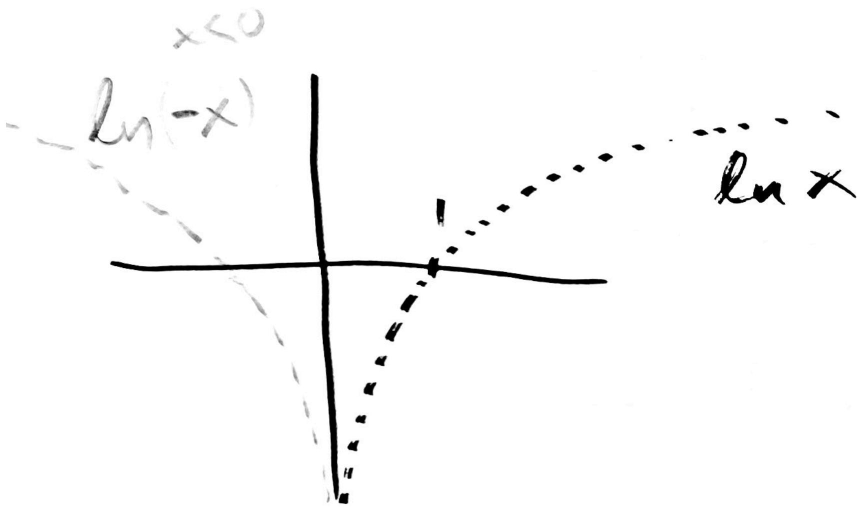
$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

$10^{\log x} = x$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$ så

$\log(1000) = 3$

$\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1.$



$\ln(-x)$ def. for $x<0$

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)'$

$= \frac{1}{x}.$

12-tonesystemet

Kromatisk tone skala

To toner sammen høres mest harmonisk ut når forholdet mellom frekvensene er en brøk med liten nevner.

$\frac{f_1}{f_2} = 2$	Hel oktav	
$\frac{3}{2}$	Kvint	C – G
$\frac{4}{3}$	Kvart	C – F
$\frac{5}{4}$	ters	C – E

Kromatisk tonesystem : Forholdet mellom etterfølgende halvtoner er likt for alle toner.

Deler opp en oktav i n toner

Forholdet mellom etterfølgende toner

må da være $\underline{\sqrt[n]{2}}$.

Ønsker en oppdeling slik at heltallige potenser

av $\sqrt[n]{2}$ kommer nær

$\frac{3}{2} = 1.5$

$\frac{4}{3} = 1.33$

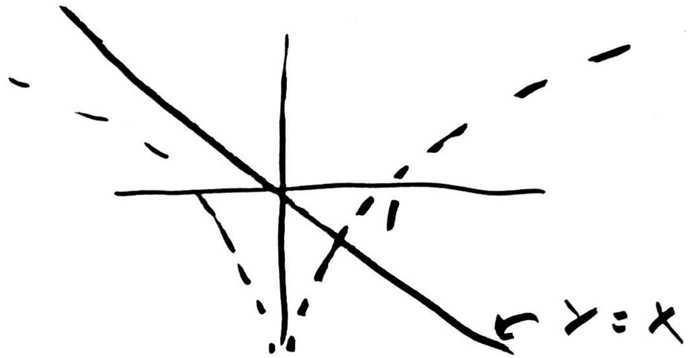
$\frac{5}{4} = 1.25$.

Ser i geogebra at $n=12$ fungerer bra

1.26, 1.335, 1.498.

Funksjonsdrøfting

$f(x) = \ln(x^2) - x \qquad x \neq 0$



$f'(x) = \left(2\ln(|x|) - x\right)'$

$f'(x) = \underline{2\frac{1}{x} - 1}$

$f''(x) = \left(2x^{-1} - 1\right)'$

$= \frac{-2}{x^2} < 0$ for alle x

<u>konkav</u> ned

i $\langle -\infty, 0\rangle$

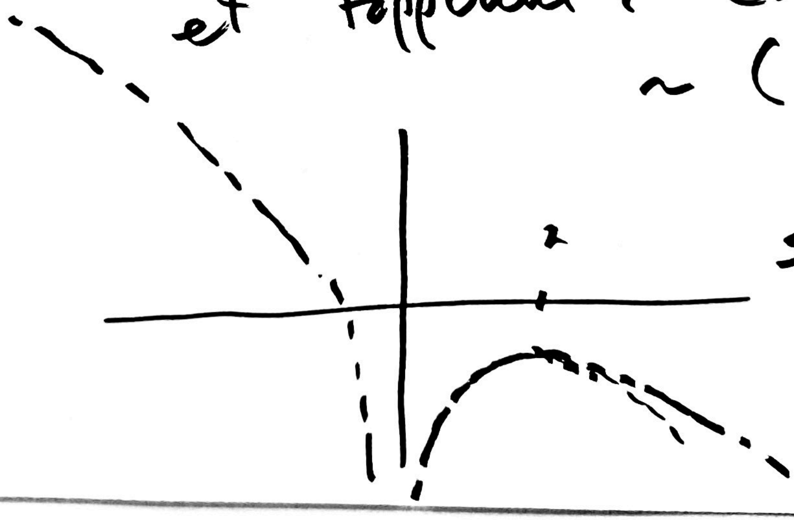
og i $\langle 0, \infty\rangle$

$f'(x) = 0 \quad : \quad \frac{2}{x} - 1 = 0$

kritisk punkt : $x = 2$

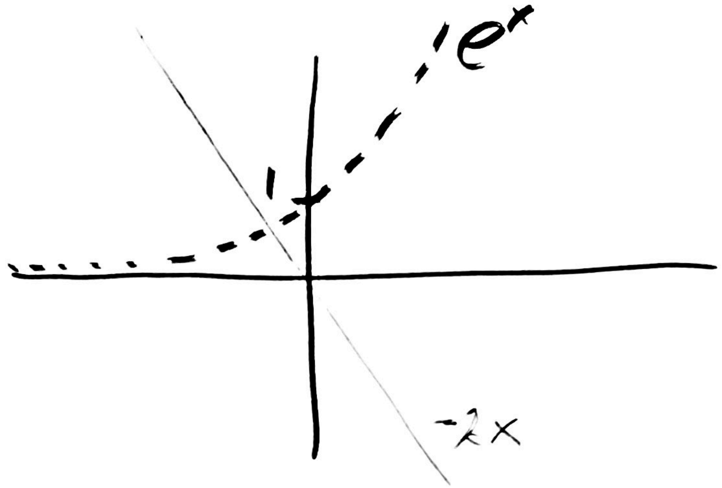
Siden $f''(2) < 0$ så er det et toppunkt : $(2, 2\ln 2 - 2)$

$\sim (2, -0.6)$



Skisse av $f(x)$.

oeg. $g(x) = e^x - 2x$



skrå asymptote

$y = -2x$ (når $x \to -\infty$)

$g'(x) = e^x - 2$

$g''(x) = e^x > 0$

konkav opp for alle x

$g'(x) = 0$

for $e^x = 2$

$x = \ln 2 \sim 0.693$

$g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \cdot \ln 2 = 2 - 1.4 \sim \underline{0.6}$

Bunnpunkt i $\underline{(\ln 2, 2 - 2\ln 2)}$.

$\sim (0.7, 0.6)$