11.02
2022

Oppgaver. Deriver funksjonene.

1) $2x^3 e^{-x^2}$

$$(2x^3 e^{-x^2})' = 2(x^3 \cdot e^{-x^2})' = 2\Big(\underbrace{(x^3)'}_{3x^2} e^{-x^2} + x^3 \underbrace{(e^{-x^2})'}_{e^{-x^2}\underbrace{(-x^2)'}_{-2x}}\Big)$$

$$= 2(3x^2 e^{-x^2} + -2x^{3+1} e^{-x^2})$$

$$= 2x^2 e^{-x^2}(3-2x^2) = \underline{2x^2(3-2x^2)\, e^{-x^2}}$$

2) $\frac{x+2}{x^2-4}$ forsøker å forkorte det rasjonale uttrykket.

$$\frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \quad \text{for } x \neq \pm 2$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)' = ((x-2)^{-1})' = \frac{-1}{(x-2)^2} \underbrace{(x-2)'}_{1}$$

$$= \underline{\frac{-1}{(x-2)^2}}$$

3) $\ln|x^3/(2x-5)^5| = \ln(x^3) - \ln((2x-5)^5)$

$= 3\ln|x| - 5\ln|2x-5|$

$x \neq 0, 25$

$(\ln|x^3/(2x-5)^5|)' = 3(\ln|x|)' - 5(\ln|2x-5|)'$

$= 3 \cdot \frac{1}{x} - 5\frac{(2x-5)'}{2x-5}$

$= \underline{\frac{3}{x} - \frac{10}{2x-5}}$

4) Deriver $e^2 e^x e^{2x-5} = e^{2+x} e^{2x-5} = e^{2+x+2x-5}$

$= e^{3x-3}$

$(e^{3x-3})' = e^{3x-3} \underbrace{(3x-3)'}_{3}$

$= \underline{3e^{3x-3}}$

Prosenter $100\% = 1$ $1\% = \frac{1}{100}$

Promille $1‰ = \frac{1}{1000}$

Pris før økning.

øker med 30%

$P_0 + 0.3P_0 = (1.3)P_0$

øker deretter med 40%

$(1.3) \cdot P_0 + 0.4(1.3)P_0$

$= (1.3) \cdot (1.4) P_0$

$= 1 + 0.3 + 0.4 + \underbrace{0.3 \cdot 0.4}_{0.12}\,)\, P_0$

$= (1.82) P_0$

Total økning av først 30%, deretter 40%
er en økning på $\underline{82\%}$

- En vare stiger 20%, og to mnd etter stiger den ytterligere 30%. Hva er total stigning i pris?

P_0 P_1 P_2

- En vare stiger 50% og deretter kommer den på tilbud til 50% av tidligere pris. Hva er prisen i forhold til opprinnelig pris?

Renter

Årlig rente.

r

$10\% = 0.1$

P_0 start pengemengde

$P_1 = (1+r)P_0 = P_0 + rP_0$ etter 1 år

$P_2 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$

$= (1+2r+r^2) P_0$

$P_3 = (1+r)^3 P_0 \ \ldots$

Har en rente på 3% og den øker med 5%

$3\% (1+5\%) = 3\% (1.05) = 3.15\%$

Riktig formulering: Har 3% og renten øker med 5 prosentpoeng til $(3+5)\% = \underline{8\%}$

Rente r renter legges til kontinuerlig.

Pengemengde etter t år

$$\left(1+\frac{r\cdot t}{n}\right)^n P_0 \quad \text{og lar } n\to\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{(n/tr)}\right)^{(n/tr)\cdot tr}$$

$$= \Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n/tr}\right)^{n/tr}}_{e}\Bigg)^{tr}$$

Pengemengde etter t år er $\boxed{P_t = e^{rt} P_0}$

$r = 100\%$ $P_1 = e P_0 \sim 2.718\, P_0$

50% $P_1 = e^{1/2} P_0 \sim 1.648\, P_0$

Basispunkt $\quad \frac{1}{100}$ prosentpoeng.

"Styringsrenten økes 15 basispunkt, fra 1.2% til 1.35%"

Rente 100% $\quad$ P_0 : startsum

$$P_1 = P_0 + 100\% \cdot P_0 = 2P_0$$

Deler opp i 12 mnd.

$\frac{100}{12}\%$

$$P_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613\ldots \cdot P_0$$

Deler opp i dager

$\frac{100\%}{365}$

$$P_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714\ldots P_0$$

Deler opp i n deler og lar $n \to \infty$

$$P_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \cdot P_0$$

$r = 10\%$ $\quad P_1 = e^{1/10} P_0 = \sqrt[10]{e}\, P_0 \sim (1{,}1051)\, P_0$

$r = 3\%$ $\quad P_1 = e^{0.03} P_0 \sim (1{,}03045)\, P_0$

kontinuerlig rente svarer til 3,045 årlig rente.

Kontinuerlig forrenting : $\underline{P'(t) = P(t) \cdot (r)}$

Eksempel på en differensial likning $\qquad$ kontinuerlig rente.

observer at $P(t) = P_0 e^{rt}$ har egenskapene:

$$P(0) = P_0 e^0 = P_0$$

$$P'(t) = P_0 (e^{rt})' = P_0 e^{rt} \cdot \overbrace{(rt)'}^{r}$$

$$P'(t) = r P_0 e^{rt} = r P(t)$$

Sammenheng mellom kontinuerlig rente r
og årlig rente $r_{p.a}$ (pro anno)

$$e^{r \cdot 1} = \boxed{e^{r} = (1 + r_{p.a})}$$

$$\underline{r} = \ln e^{r} = \underline{\ln(1 + r_{p.a})}$$

Hvis årlig rente skal være 100%, hva må den kontinuerlige renten være?

$$r = \ln(1 + 100\%) = \ln 2 \approx 0.6931\ldots$$

$$\approx \underline{69.3\%}$$

$P(t) = e^{r \cdot t}$ uttrykk dette ved årlig rente.

$P(t) = (1+r_{p.a})^t P_0$

Eller 3 mnd , $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P(\frac{1}{4}) = P_{1/4} = (1+r_{p.a})^{1/4} P_0 = \underline{\sqrt[4]{1+r_{p.a}}}\ P_0$