1. mars 2022

Kap. 15 Integrasjon.

Denne uken 15.1–5 Ubestemte integral

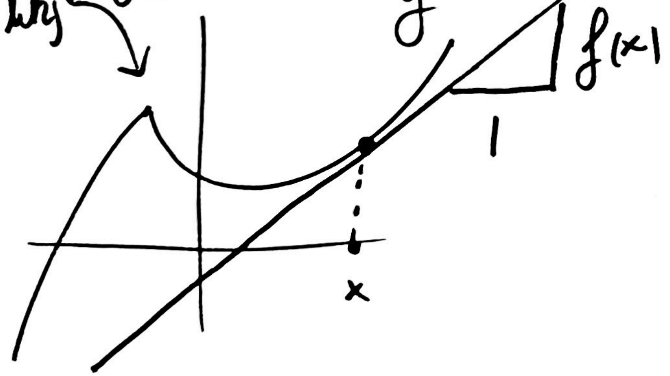
Fredag : bestemte integral

neste uke 15.6–9 Fundamentalteoremet

$f(x)$ funksjon – deriverer – den deriverte $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$

funksjon som gir stigningstallet til tangentlinjen til $f(x)$ i $(x, f(x))$

ikkje deriverbar.



$S(t)$ posisjon i tiden t

$V(t) = S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ hastigheten

$(x^r)' = r x^{r-1}$ $\quad$ r reelt tall

$(x^3)' = \underline{3x^2}$ $\quad$ $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}$

$= \frac{1}{3} x^{-2/3} = \underline{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

En antiderivert $F(x)$ av $f(x)$ er en funksjon slik at $F'(x) = f(x)$

En antiderivert til $3x^2$ er da x^3

en annen antiderivert er $x^3 + 2$.

En antiderivert til $x^2 \left(= \frac{3x^2}{3}\right)$

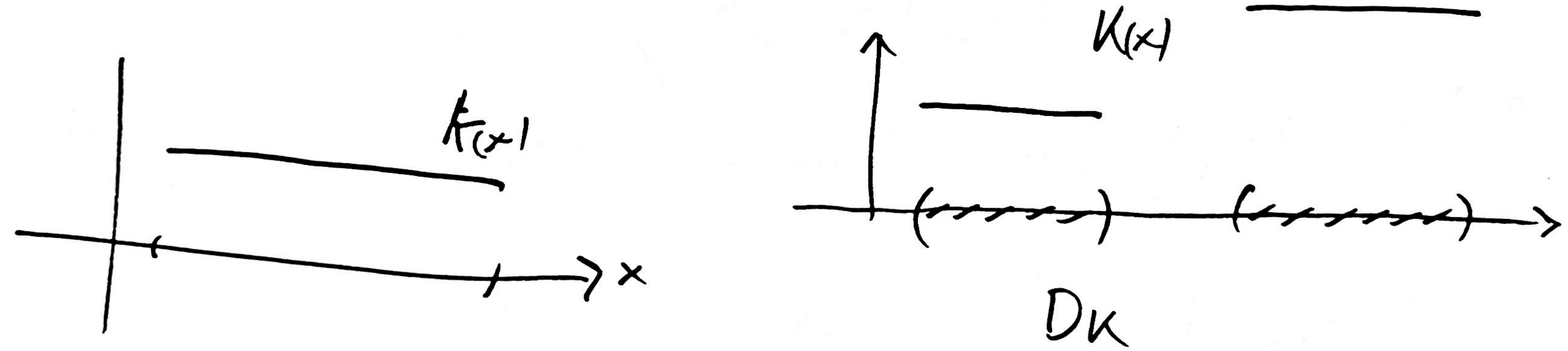
er $\frac{1}{3}(x^3) = \underline{\frac{1}{3}x^3}$

La $F(x)$ og $E(x)$ være to antideriverte til $f(x)$

$$\left(F(x) - E(x)\right)' = F'(x) - E'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

for alle x

Hvis $K'(x) = 0$ for alle x, da må K være konstant på hvert intervall i definisjonsmengden



Det som skiller to antideriverte en en funksjon som er konstant på hver komponent av definisjons-mengden.

Alle antiderivert til x^2 er $\frac{x^3}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{C}$

Det ubestemte integralet til $f(x)$ er klassen av alle antiderivert til $f(x)$

Ubestemte integralet: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

konstant (på hver del av D_f)

én antiderivert

integraltegnet

integranden

x er her integrasjonsvariabel

$S \int \int \int \int$ integraltegnet en langstrakt S (for som)

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int 3x^7\,dx = \underline{\frac{3}{8}x^8 + C}$$

$$(x^8)' = 8x^7$$

$$\left(\frac{3}{8}x^8\right)' = \frac{3}{8}(x^8)'$$

$$= \frac{3}{8}\cdot 8 \cdot x^7 = 3x^7$$

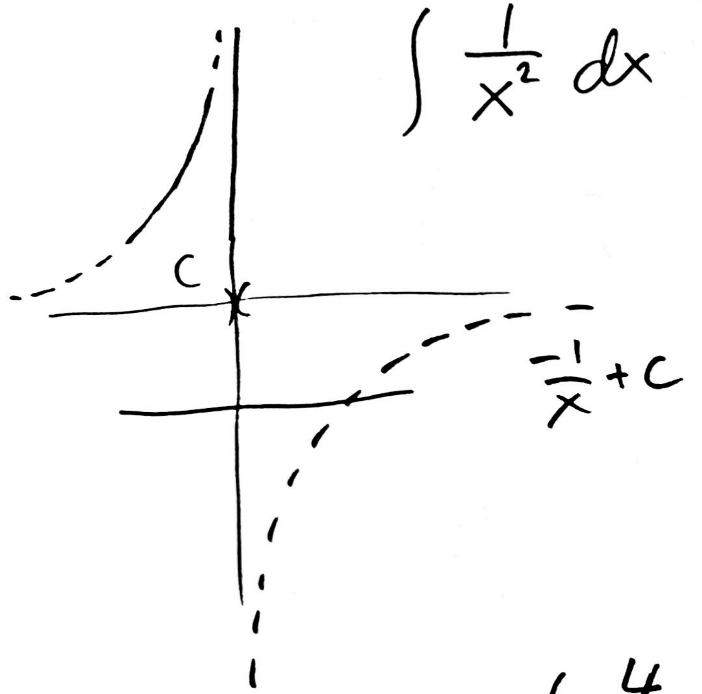
$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

$$\left(\frac{1}{r}x^r\right)' = x^{r-1}$$

$r-1 = s$ så $r = s+1$

$$\left(\frac{1}{s+1}x^{s+1}\right)' = x^s \qquad s \neq -1$$

$$\int x^s\,dx = \underline{\frac{x^{s+1}}{s+1} + C}$$



$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-1} + c$$

$$= \underline{\frac{-1}{x} + c} \qquad x \neq 0$$

(kan velge forskjellige konstanter på $x<0$ og på $x>0$.)

opg $$\int \frac{4}{x^3}\,dx = 4\int x^{-3}\,dx = 4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-2} + C = \underline{-\frac{2}{x^2} + c}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{x^{-1/3+1}}{2/3} + c = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2}(x^2)^{1/3} + c = \underline{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0 \qquad (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad x < 0$$

$$\int \frac{3+x}{x}\,dx = \int \frac{3}{x} + \frac{x}{x}\,dx = \int \frac{3}{x} + 1\,dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx + \int 1\,dx$$

$$= 3\ln|x| + C_1 + x + C_2$$

$$= \underline{3\ln|x| + x + C}$$

$$\int x^s \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + C & s \neq -1 \\ \ln|x| + C & s = -1 . \end{cases}$$

oppg $\displaystyle\int (x+1)^2 \, dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

(ved kjerneregelen:

$$\left(\frac{(x+1)^3}{3}\right)' = \frac{3(x+1)^2}{3} \cdot (x+1)' = (x+1)^2$$

)

$$\int \frac{1}{(x+1)^5} \, dx = \int (x+1)^{-5} \, dx = \underline{\frac{(x+1)^{-4}}{-4} + C} = \underline{\frac{-1}{4(x+1)^4}} + C$$

Dette er eksempler på lineær substitusjon.

Anta $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$. $F'(x) = f(x)$

Kjerneregelen gir $(F(ax+b))' = F'(ax+b) \cdot \underbrace{(ax+b)'}_{a}$

$= a f(ax+b)$

så $\left(\frac{1}{a} F(ax+b)\right)' = f(ax+b)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lineær substitusjon:} \\ \displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c \\ \text{hvor } F'(x) = f(x).\end{array}}$$

Eks $\displaystyle\int (2x-3)^4\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^5}{5} + c$

$$= \underline{\frac{(2x-3)^5}{10} + c}$$

$$\int x^2 + 2x + 1 \, dx = \underline{\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C_1}$$

$$= \int (x+1)^2 \, dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C_2 \quad \text{(som tidligere)}$$

ganger ut $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$$= (x^2 + 2x + 1)(x+1)$$

$$\int (x+1)^2 \, dx = C_2 + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3} = \underline{\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \underbrace{\frac{1}{3} + C_2}_{C_1}}$$

$(u = 2 \cdot x - 3)$

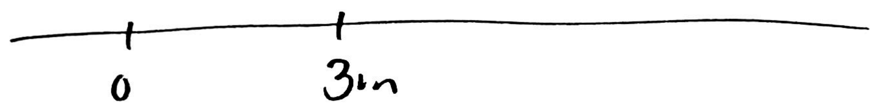
opg $\int \frac{1}{2x-3} \, dx = \underline{\frac{1}{2} \ln |2x-3| + C}$

$$\int (3x+4)^4 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+4)^5}{5} + C = \underline{\frac{(3x+4)^5}{15} + C}$$

Hastigheten langs en rett strekning er $v(t) = -2 + \frac{1}{3}t$

Vi starter i $s_0 = 3m$

Hva er posisjonen $s(t)$ ved tiden t, for $0 \le t \le 10$ sek.



Hva er $s(10)$?

$v(t) = s'(t)$

Finner antiderivert til $v(t)$

$$\int -2 + \frac{1}{3}t \, dt = -2t + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C$$

$s(t) = -2t + t^2/6 + C$

s.a. $s(0) = 3$.

så $C = 3$.

$$\underline{s(t) = \frac{t^2}{6} - 2t + 3}$$

$$s(10) = \frac{100}{6} - 20 + 3$$

$$= \frac{-20}{6} + \frac{18}{6} = \frac{-2}{6} = \underline{\underline{\frac{-1}{3}}}$$