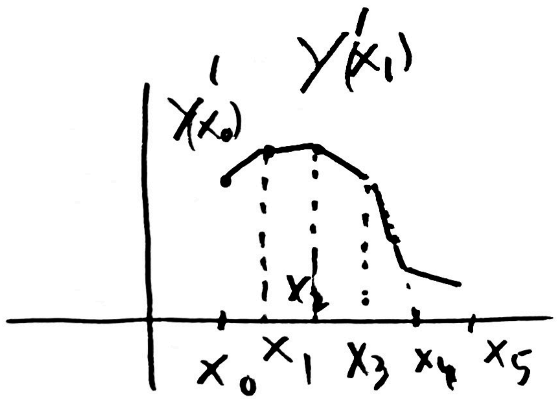
23 mars
2022

16.7-8 Differensial likninger.

$$\left.\begin{array}{l} V(t) \\ \text{og } S_0 = S(t_0) \end{array}\right\} \text{kjent gir } S(t) = \int_{t_0}^{t} V(s)\,ds + S_0$$

posisjonen.

$Y'(x) = f(x)$, funksjon av x, $Y_0 = Y(x_0)$ = "startverdi"



Eulers metode.

Dette fungerer også for $Y'(x) = f(x, Y)$ funksjon av både x og Y.

Eksempler

$Y'(x) = f(x)$ uavhengig av Y

$Y'(x) = x \cdot Y$

$y' = ry$ $\qquad\qquad$ $y'' + 2y = 0$

$y' - ry = \cos(x)$ $\qquad\qquad$ $y'' + 2y = \sin(x)$

En diff. likning er en likning som i
y og noen av dens deriverte.

Eks. $\quad y' = \frac{-x}{y}$ $\qquad$ illustrert med Eulers metode
ser ut som vi får et
sirkelsegment.

Startpunkt (0,1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$ gangar opp med y

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\underbrace{\int y\frac{dy}{dx}\,dx}_{\text{variabelskifte}} = \int -x\,dx$$

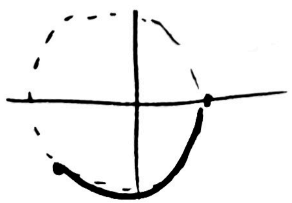
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

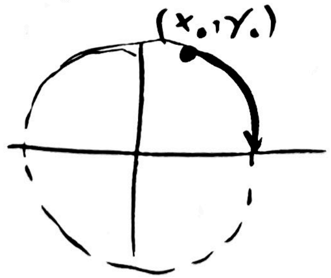
$$\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c$$

$$\underline{x^2+y^2 = 2c}$$

Sirkel med radius $\sqrt{2c}$.

starter med (x_0, y_0). Sirkelsegment i en sirkel med radius $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ og senter i (0.0).





$$Y' = r \cdot Y$$

ser at løsningen er

$$Y(t) = k e^{r \cdot t}$$

$$\frac{dY}{dt} = rY$$

$$\frac{1}{Y}\, dY = r\, d\cancel{t}$$

Regner oss frem til løsningene:

$$\int \frac{1}{Y} Y' d\cancel{t} = \int r\, d\cancel{t}$$

$$\int \frac{1}{Y} dY = \int r\, dt$$

$$e^{\ln|Y|} = e^{(r \cdot t + C)}$$

$$|Y(t)| = e^{c} \cdot e^{rt}$$

$$e^{c} > 0$$

$$Y(t) = (\pm e^{c})\, e^{rt} \iff Y(t) = k e^{rt}, \quad k \neq 0.$$

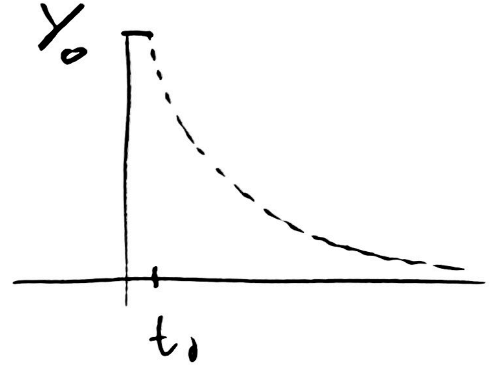
også løsning for $k = 0$. $\left.\begin{matrix} Y(t) \equiv 0 \\ Y'(t) \equiv 0 \end{matrix}\right\}$ $Y' = rY$ er oppfylt.

Løsningene er $\underline{Y(t) = k e^{rt}}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$Y'(t) = r\,Y(t)$ Beskriver forrenting med rente r.

Eksponensiell vekst $r > 0$

$r < 0$ eksponentiell avtaking.



Radioaktiv nedbryting. $k > 0$

$Y' = -kY$

$\underline{Y(t) = Y_0 e^{-kt}}$ mengde radioaktivt stoff ved tiden t.

Halveringstiden $t_{1/2}$ er tiden det tar før mengden stoff er halvert.

$Y(t_{1/2}) = Y_0/2$ gir $\underline{e^{-k t_{1/2}} = \frac{1}{2}}$

$-k\,t_{1/2} = \ln(1/2) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2$

$k \cdot t_{1/2} = \ln(2)$ så $\underline{k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}}$

C^{14}-metoden.

Andel C_6^{14} i atmosfæren 10^{-12}

C_6^{13} 1%

C_6^{12} 99%

$\left(C_6^{14} \rightsquigarrow N_7^{14} + \beta + \nu \right)$

Halveringstiden til C^{14} er 5700 år.

OPPG. Vi finner beinrester hvor andelen C^{14} er 0.3 av den i atmosfæren.

Hvor gamle er beinrestene?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{T/t_{1/2}} = 0.3$$

$$Y(T) = 0.3 = e^{-kT} = e^{-\ln 2\left(\frac{T}{t_{1/2}}\right)} = 0.3$$

$$T = t_{1/2} \frac{\ln(0.3)}{\ln(0.5)} = 5700\text{år} \cdot 1.7369 \sim \underline{9901 \text{ år}}$$

opg

$$y' = \frac{y}{x}$$

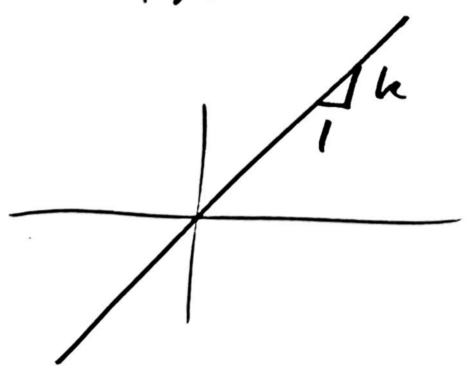
$$\underbrace{\frac{1}{y} y'}_{\text{"bare } y\text{"}} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{"bare } x\text{"}}$$

$$\int \frac{1}{y} \underbrace{y' dx}_{dy} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|y| - \ln|x| = C$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| = e^C$$



$$\frac{y}{x} = k$$

$k \neq 0$
ok for $k=0$.
ogsa

$$\underline{y = k \cdot x}$$

$k \in \mathbb{R}$

$y' = \frac{-y}{x}$ tilsvarende:

$$\ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$\ln|x \cdot y| = c$$

$$|x \cdot y| = e^c$$

$$x \cdot y = k \qquad k \neq 0$$

$$\underline{y_{(x)} = \frac{k}{x}}$$

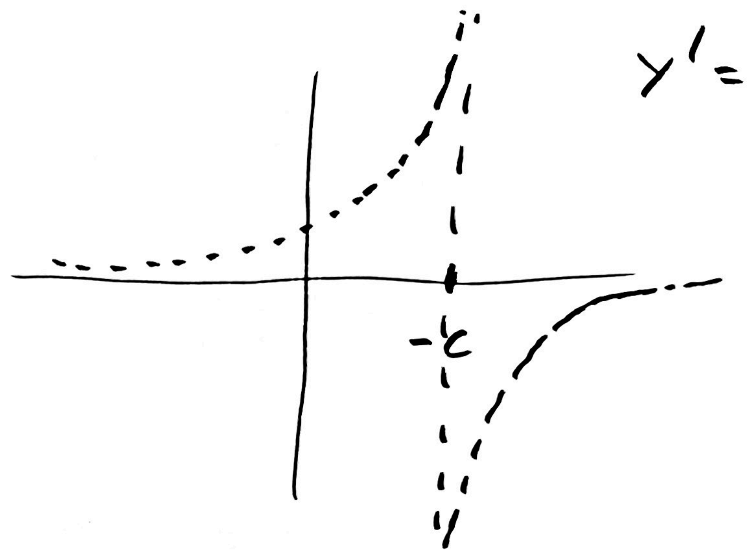
Eks $y'_{(x)} = y^2$

$$\frac{y'}{y^2} = 1$$

$$\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{y} = x + c$$

$$y(x) = \frac{-1}{x+c}$$



$y' = y^2$

Logistiske diff likningen.

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{P}\right)$$

P konstant (populasjon)

k konstant.

$$\frac{y'}{y(1 - y/P)} = k$$

$$\int \frac{1}{y(1-y/P)}\,dy = \int k\,dt$$

Delbrøksoppspalting:

$$\frac{1}{y(1-y/P)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y/P)}$$

$$1 = A\left(1-\frac{y}{P}\right) + By$$

$y=0$: $\underline{A = 1}$

$y=P$: $1 = B \cdot P$ så $B = \frac{1}{P}$

$$\int \frac{1}{y(1-y/P)}\,dy = \int \frac{1}{y} + \frac{1/P}{1-y/P}\,dy$$

$$= \int \frac{1}{y} + \frac{1}{P-y}\,dy = \ln|y| - \ln|P-y| + C$$

$$= \ln\left|\frac{y}{P-y}\right| + C = \int k\,dt = kt$$

$$\ln\left|\frac{y}{P-y}\right| = kt + C_1$$

$$\left|\frac{y}{P-y}\right| = e^{C_1}e^{kt}$$

$$\frac{Y}{P-Y} = L e^{kt} \qquad L \in \mathbb{R}$$

Løser for $Y(t)$:

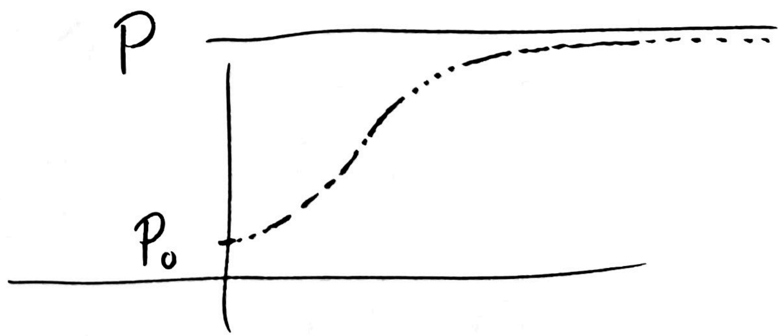
$$Y(t) = (P-\cancel{Y}) L e^{kt}$$

$$Y(t)\left(1 + L e^{kt}\right) = P L e^{kt}$$

$$Y(t) = P \cdot \frac{L e^{kt}}{1 + L e^{kt}}$$

$$Y(0) = P_0 \qquad \frac{P_0}{P-P_0} = L e^0 = L$$

$$\underline{\underline{Y(t) = P \frac{P_0 e^{kt}}{P - P_0 + P_0 e^{kt}}}}$$



orden til en diff. likning er høyeste derivele som forekommer.

$y'' = y + 1$ orden 2

$y' = xy$ orden 1

$s''(t) = s'(t)$ orden 2 i s

$(s'(t))' = s'(t)$ orden 1 i $s'(t)$

Linear i y, y' etc.

$$a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y = 0 \quad \text{homogen}$$

— 〃 — $= \sin(x)$ inhomogen

Separable diff likninger

separere x og y avhengighet

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

16.151d)

$$\overbrace{\int \frac{1}{2x^2-4x}\,dx}^{\text{Øving}} = \int \frac{1}{2x(x-2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x-2)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad \text{gir} \quad A = -\frac{1}{2},\ B = 1/2$$

$$\int \frac{1}{2x^2-4x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-1/2}{x} + \frac{1/2}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right| + C}$$

16.149 $\int x^3 e^{x^2} dx$

$x^2 = u$

$2x = du/dx$

$2x\,dx = du$

$\int x \cdot x^2 \, e^{x^2} dx$

$\frac{1}{2}u' \quad u \quad e^u$

$= \frac{1}{2} \int u e^u du$ delvis integrasjon

$= \frac{1}{2} \left(u e^u - \int (u)' e^u du \right)$

$= \frac{1}{2} \left(u e^u - \int e^u du \right) = \frac{1}{2}(u e^u - e^u) + C$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + C.$

16.160

$f(x) = e^{-x} + xe^{-x} + x^2 - 4x + 6$

er en løsning til $\quad y'' + 2y' + y = x^2$.

$e^{-x} + xe^{-x}$ løsning til den homogene lineære diff. likningen $\quad y'' + 2y' + y = 0$

søker løsning $\quad y(x) = x^2 + ax + b$

$y'(x) = 2x + a$

$y''(x) = 2$

sette inn :

$$2 + 2(2x + a) + \underline{x^2 + ax + b} = x^2$$

$$\underbrace{2(1+a)+b}_{} + x(\underbrace{4+a}_{0}) = 0$$

$a = -4 \quad$ og $\quad b = -2(1+a) = -2(1-4) = \underline{6}$