29 mars
2022

18.1-2 Mengdelære

En mengde er en samling elementer.

Mengde S

e element i S $\qquad e \in S$ "element i"

(1) $S = \{1, 2, A, Z, +\}$

$T = \{1, \underbrace{\{2,3\}}_{\text{ett element}}, \overbrace{\underbrace{[4,5]}_{\text{intervall}}}^{\text{ett element}}\}$ mengder av mengder.

$1 \in T \qquad 4 \notin T$ (Ikke element i) $[4,5]$ tolket som en delmengde av $\mathbb{R}$

$2 \notin T$

Tomme mengde $\qquad \emptyset = \{\ \}$ ingen elementer.

2

To mengder S og T er <u>like</u> hvis de har de samme elementene.

$$x \in S \iff x \in T$$

$$\{1,2\} = \{1,2\} \neq \{1,2,\{2\}\}$$

<u>Delmengder</u>.

$S \subset T$ inneholdt i
($T \supset S$ inneholder)

$$x \in S \Rightarrow x \in T$$

alle elementer i S er også elementer i T.

$$\{1,2\} \subset \{1,2,\{2\}\}.$$

$$\{A,B,C\} \supset \{B,C\}.$$

$\emptyset \subset A$ for alle mengder A.

Russels paradoks:

S = Mengden av alle mengder som ikkje inneholder seg selv.

3

Dette giv en selvmotsigelse!

S kan ikke være en mengde! ("for stor")

→ Zermelo-Fraenkel aksiomer for mengdelære

Naturlige tall

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = 1 \text{ og } \{1\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

n bygges opp fra $n-1$

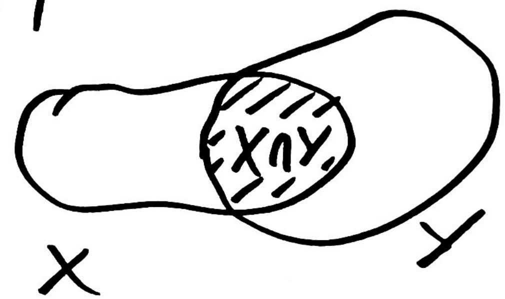
$n-1$ og mengden av $n-1$

Snitt av mengder

$X \cap Y$ mengden av alle elementer i både X og Y

4

$\{1,2,3,4,5\} \cap \{4,5,6,7\} = \{4,5\}$



$\{1,2,\{3,4\}\} \cap \{2,3,5\} = \{2\}.$

$\{A,B,C,D,E\} \cap \{B,C,E\} \cap \{A,C,D,E\} = \{C,E\}$

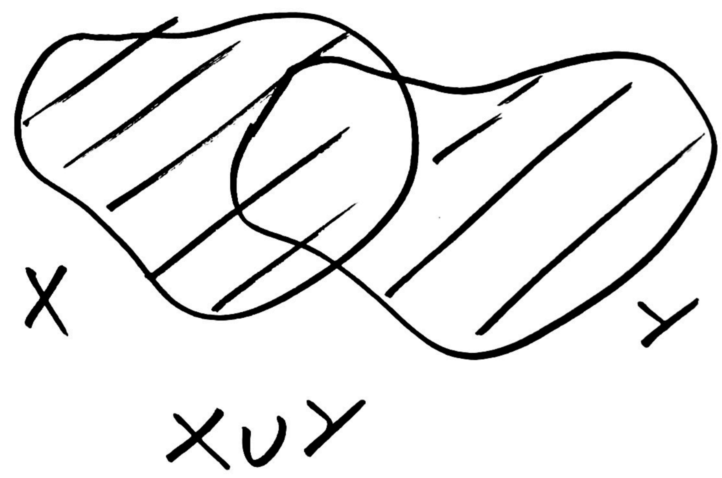
Union av mengder.

$X \cup Y$ = mengden av alle elementer som er i minst én av X og Y

5 $\{1, 2, A, B, C\} \cup \{0, 1, B, C, D\} = \{0, 1, 2, A, B, C, D\}$

$(\{1, 1\} = \{1\})$

Venn-diagram



$\{1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\} \cup \{0, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$

$= \{0, 1, 2, \{1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}$

Komplement

6

$A \subset B$ (delmengde

Komplementet til A i B : $B \setminus A = B - A$

Mengden av alle elementer i B som ikkje er i A.

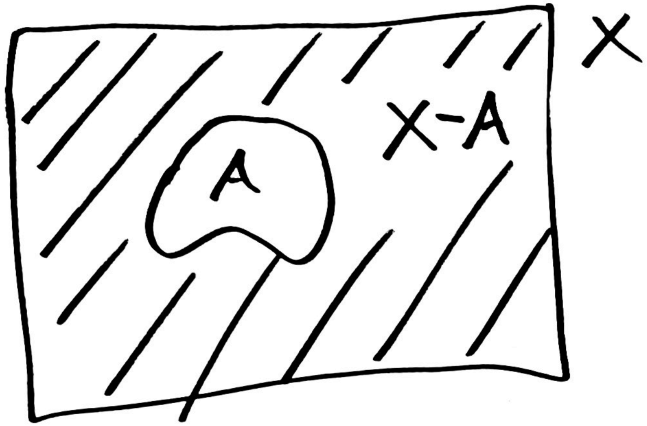
$$\underset{A}{\{A, C, D\}} \underset{\subset}{\subset} \underset{B}{\{A, B, C, D, E\}}$$

$$B \setminus A = \{B, E\}$$

Brukes ofte hvor det er en felles grunnmengde X

$X - A = X \setminus A = \bar{A}$ (X underforstått)

Typisk X: $\mathbb{R}$ reelle tall, A delmengder av $\mathbb{R}$.



$X = \mathbb{R}$

$A = \{ x \mid x \leq 1 \}$

$\bar{A} = \{ x \mid x > 1 \}$

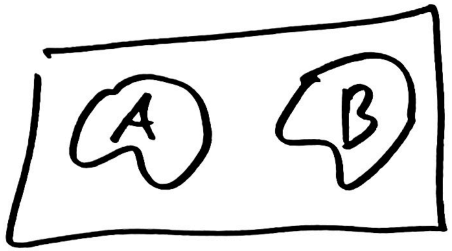
7

$A \cup \bar{A} = X$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$ disjunkte

$A, B \ (\subset X)$ disjunkte hvis de har ingen elementer til felles

$A \cap B = \emptyset$

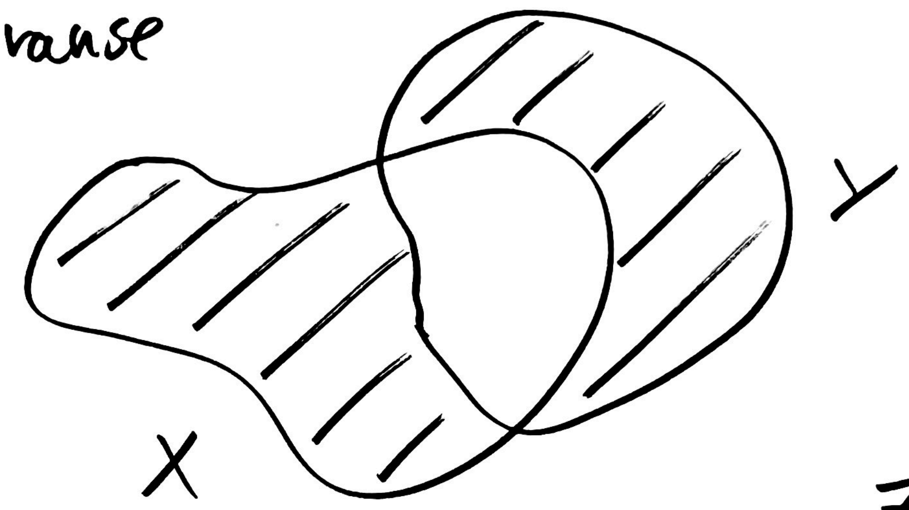


A, X mengder (A ikke nødvendigvis delmengde av X)

$X \setminus A$

$= X \cap (X \cap A)$

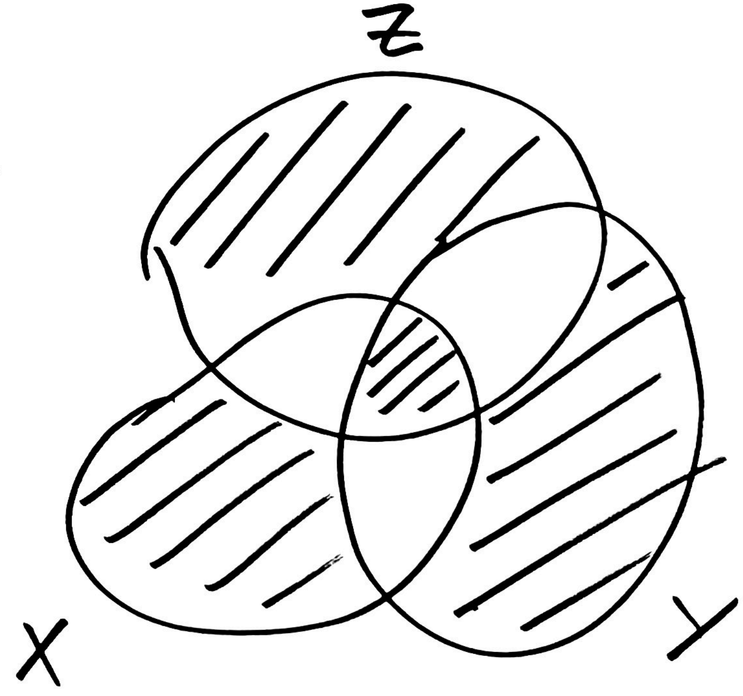
Symmetrisk differanse



8

$X \Delta Y = X \cup Y - X \cap Y.$

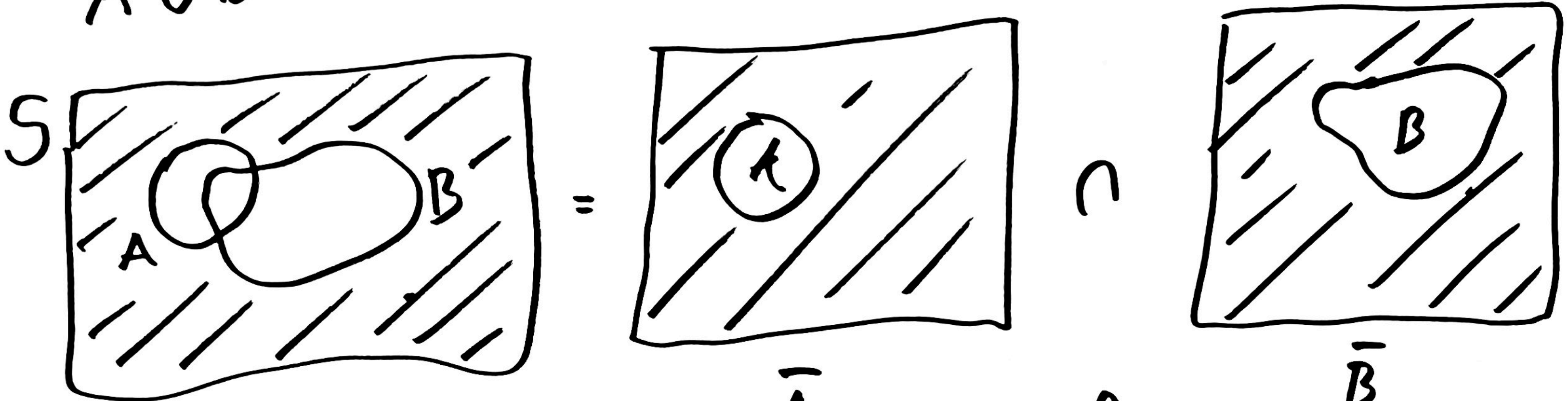
$X \Delta X = \emptyset$



$X \Delta Y \Delta Z$

$A, B \subset S,$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(9)



$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A = \{P, S, T, U\}$ $B = \{O, P, Q, R, S\}$

<u>opg</u>

$A \cap B = \{P, S\}$

$A \cup B = \{O, P, Q, R, S, T, U\}$

$A \Delta B = \{O, Q, R, T, U\}.$

Funksjoner

$f : X \to Y$

tilordner $f(x) \in Y$ for hver $x \in X$.

10

Reelle funksjon $Y = \mathbb{R}$ (eller en delmengde)

$X = \{A, B, 3\}$ $Y = \{C, K, 5, \{C, D\}\}$

Eks. Funksjon $f : X \to Y$

$f(A) = K$

$f(B) = \{C, D\}$

$f(3) = 5$

11

$f : X \to Y$ **injektiv** hvis $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer at $x_1 = x_2$

én-til-én

surjektiv For alle $y \in Y$ så finnes det $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

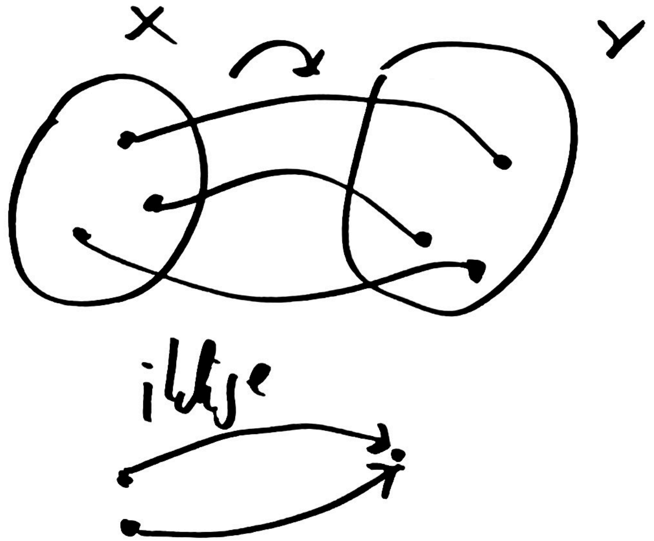
$\forall y \in Y \; \exists x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Kvantorer

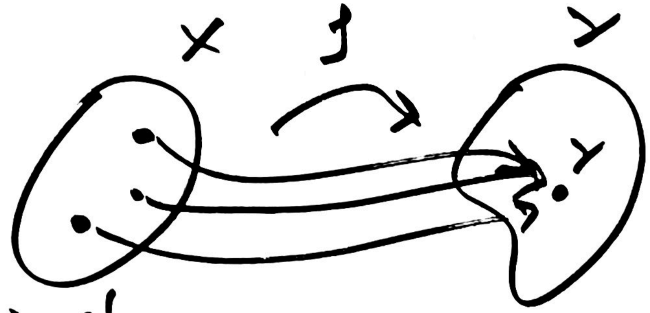
$\exists$ "eksisterer"

$\forall$ "for alle"

injektiv



surj

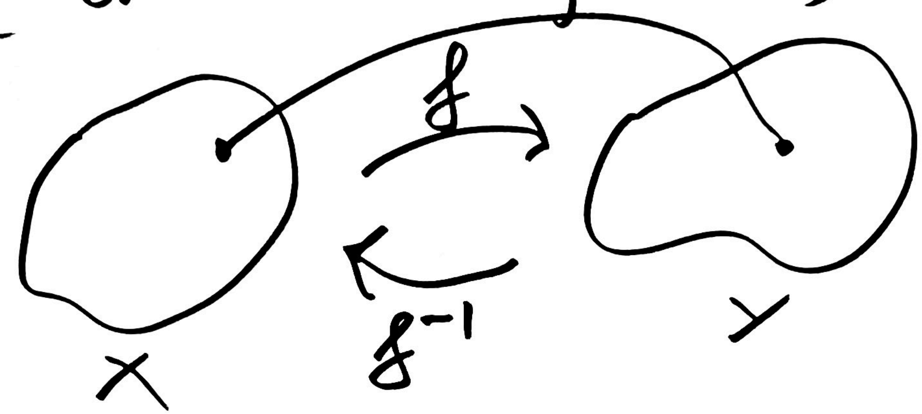


minst én x som sendes til y.

alle y

(12)

<u>bijektiv</u> er både injektiv og surjektiv



slike funksjoner har en inversfunksjon.

$f^{-1}(y) = x$ slik at $f(x) = y$.

$\{A, B, C\} \xrightarrow{f} \{1, 2, 3\}$ bijeksjon

(skrives $\cong$ og kalles isomorfi i matematikk)

$f(A) = 1$ $f(B) = 2$, $f(C) = 3$

$f^{-1}(1) = A$ $f^{-1}(2) = B$ $f^{-1}(3) = C$

To endelige mengder er (isomorfe) i bijeksjon hvis de har like mange elementer.

To uendelige mengder behøver ikke være bijektive!

Eks $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ uendelig mengde.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 4$
$\vdots$

injektiv, men ikkje surjektiv!

En uendelig mengde kan legges inn som en ekte delmengde av seg selv.

Kartesisk produkt. $\quad X, Y$ mengder

$X \times Y$ "produktmengden"

elementer (x, y) $\quad x \in X$, $y \in Y$

$$\{1,2\} \times \{A,B,C\} = \{ (1,A),(1,B),(1,C), (2,A),(2,B),(2,C) \}$$

(14)

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
Z \arrow[rru, bend left] \arrow[rrd, bend right] \arrow[r, dashed, "\exists !"] & X \times Y \arrow[ru, "\text{projeksjo}"] \arrow[rd] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow x \\ (x,y) \\ \searrow y \end{array}$$

15

Potensmengder. $\quad 2 = \{0,1\}$

$$\{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$
$$= \{ (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) \dots \}$$
$$2^3 = 8 \text{ elementer}$$

X mengde $\quad 2^X = \{0,1\}^X$

$$2^{\mathbb{N}} = \{ (0,1,1,0,1,1,0,0,0,1, \dots) \}$$

tellbart uendelig tuppel med 0 og 1

$$2^X \cong \text{Mengden av delmengder av } X.$$
$$\cong \text{Mengden av funksjoner } X \xrightarrow[f]{} \{0,1\}$$

$$f^{-1}(1) = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \subset X$$

Dette gir bijeksjon mellom delmengder av X og funksjoner $f : X \to \{0,1\}$.

16

$X \subset 2^X$

x svarer til $f : X \to \{0,1\}$ som er gitt ved $f(x) = 1$ og 0 ellers

2^X er større enn X. $(X \neq \emptyset)$

Det finnes ikkje en bijeksjon mellom X og 2^X

$$\mathbb{N} \subset 2^{\mathbb{N}} \subset 2^{(2^{\mathbb{N}})} \subset \dots$$

Hierarki av uendeligheter.