

30 mars
2022

Kombinatorikk

18.3 -

Lekebil
bestemt
av størrelse
og farge

$\{\text{stor, liten}\} \times \{\text{R, G, B}\}$
størrelse farge

$(\text{stor, R}), (\text{stor, G}), (\text{stor, B})$
 $(\text{liten, R}), (\text{liten, G}), (\text{liten, B})$.

Antall muligheter $2 \cdot 3 = 6$.

k valg $(n_1 \text{ muligheter}, n_2 \text{ muligheter}, \dots, n_k \text{ muligheter})$

antall muligheter $\underline{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k}$

Multiplikasjonsprinsippet

(mengdeteoretisk $\#A$ antall element.)
 $\#(S \times T) = \#S \cdot \#T$

Eksempel

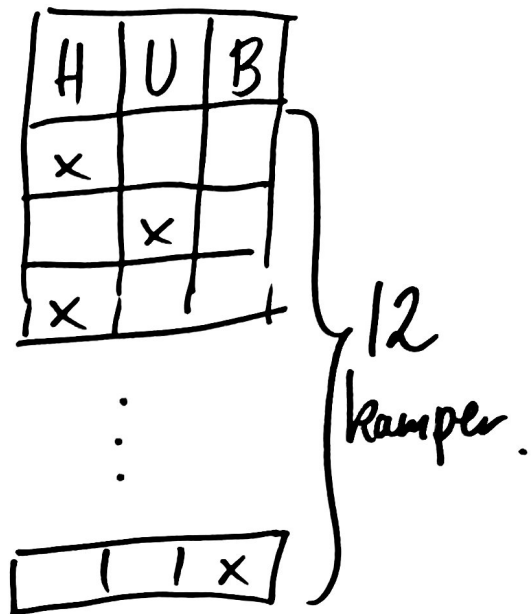
Antall mulige bilshilt⁵
To bokstaver 5 tall 0, ..., 9
(eng.)

26

Antall kombinasjoner $26 \cdot 26 \cdot 10^5 \sim \underline{67.6 \cdot 10^6}$

Tipping

$$\begin{aligned} & \underbrace{3 \cdots 3}_{12} = 3^{12} \\ & = (3^2)^6 \\ & = \underline{531441} \end{aligned}$$



opg. Klasse med 15 jenter
10 gutter.

2 tilitsvalgte, én gutt og én jente.
Hvor mange muligheter er det?

G mengden av gutter $\#G = 10$
 J ————— jenter $\#J = 15$
 Tilitsvalgte $T = G \times J$
 par (gutt, jente)...

Antall tilitsvalgte $(\#T)$
 $= (\#G \times J)$ Antall gutter $\cdot$ antall jenter
 $10 \cdot 15 = \underline{150}$

Pin - kode

— — — —

siffer 0, ..., 9

Antall muligheter (10 muligheter)^{4 valg}

$$= \underline{10^4}$$

(Alternativt pin-kodene gjennomløper
heltall fra og med 0 = 0000
til og med 9999...)

Ord med to bokstaver (29 antall)

ord — — $29^2 = 841$
 $(30-1)^2$

ord med 2 ulike bokstaver.

med like bokstaver

$$29 \cdot 29 - 29 = \underline{812}$$

$$29(29-1) = 29 \cdot 28$$

Alternativ rekkegang

$$\begin{array}{cc} 29 & \cdot & 28 \\ \text{valg} & & \text{valg} \\ & & (\text{men unngå} \\ & & \text{første bokstav}) \end{array}$$

par av ball

(13, 17)

(2, 9)

(5, 3) ...

$$T = \{1, \dots, n\}.$$

par

$$n \cdot n = \underline{n^2}$$

opg.

Hva er antall par

(t_1, t_2) hvor $t_1 <_{\text{elk}} t_2$

$n=3$

(1, 2), (1, 3), (2, 3)

(2, 1), (3, 1), (3, 2)

og (1, 1), (2, 2), (3, 3)

par med forskjellige ball $t_1 \neq t_2$

$$\underline{n \cdot (n-1)}$$

par med like ball

$$\underline{n}$$

$$t_1 = t_2$$

Antall $\{ (t_1, t_2) \in T^2 \mid t_1 < t_2 \}$

= # par (t_1, t_2) og (t_2, t_1)
med $t_1 \neq t_2$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

Alternativt

$(1, 2 \text{ til } n)$

$n-1$

$(2, 3 \text{ til } n)$

$n-2$

$(3, 4 \text{ til } n)$

$\vdots$

$\vdots$
 $(n-1, n)$

$\vdots$

2

1

$(n, \text{ingen mulighet})$

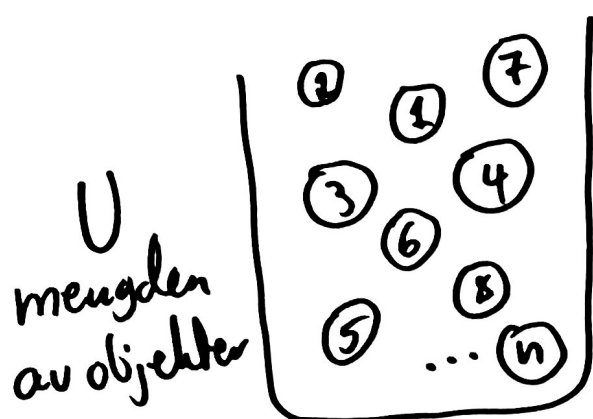
0

muligheter

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

18.4-5 Urnemodellen



Beholder
med
n forskjellige
objekter

Ordna

Utvalg med tilbakelegging

Trekken k objekter

	<u>7</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	...	<u>13</u>
#	1	2	3	...	k

elementer i $\underbrace{U \times U \times \dots \times U}_k$

Antall muligheter (mulige utfall)
er n^k

Ordna utvalg uten tilbakelegging.

n objekter

k uttrekk

Antall muligheter

$$k \leq n$$

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{}$$

$n=k$ plukke ut alle n elementene

$$n(n-1)(n-2) \dots 1$$

Dette skrives $n!$
"n faktoriell"

Permutasjoner $(X_1, \dots, X_n)$ n forskjellige objekter

ombytter kalles permutasjoner.

$(1, 2, 3)$ permuteres til $(2, 1, 3)$
 $(3, 1, 2)$

antall permutasjoner av
 n forskjellige objekter
er $n!$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$$

$$5! = 4! \cdot 5 = 120$$

$$6! = 5! \cdot 6 = 720$$

$$\left(n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{Stirlings formel} \right)$$

$$10! = 3\,628\,800$$

Eksempel

K klasse med 20 elever.
Velger tre representanter

Leder, nestleder, kasserer.

Dette gir en ordning.

Antall mulige kombinasjoner :

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

(ordna uttrekk uten tilbakelegging)

Uordna utvalg uten tilbakelegging.

n forskjellige objekter

Velge k objekter (uten tilbakelegging)
ordne ikke de k utvalgte.

Antall muligheter

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

ordna utvalgt / # permutasjoner
av de k utvalgte
objektene.

Dette er lik $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dg skrives $\binom{n}{k}$
"n valg k"
("n chose k")

$\binom{n}{k}$ kalles binomialkoeffisient.

Eks 20 elever
velger vi en gruppe av 3 elever
(uten ordning)

Hvor mange slike grupper kan
vi lage?

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \underline{1140}$$

opg Klasse 15 jenter
10 gutter.

Velge en gruppe med 5 personer
3 jenter og 2 gutter.

Hvor mange slike grupper kan vi lage?

$$\binom{15}{3} \cdot \binom{10}{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2!}$$

vordne
utvalg av
3 jenter
av 15

vordne
par av
gutter
blant 10

$$= 455 \cdot 45$$

$$= \underline{20475}$$

Lotto 34 kuler



Trekke ut 7 kuler
uten tilbakelegging

mulig trekk (med ordning)

$$34 \cdot 33 \cdots 28 = 27113264640$$

mulige uordna trekk

$$\frac{34 \cdot 33 \cdots 28}{7!} = 5379616$$