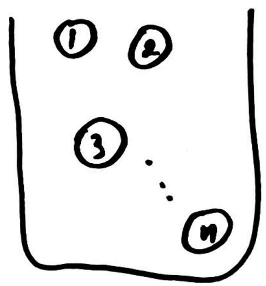
1 april
2022

Kombinatorikk II



urne

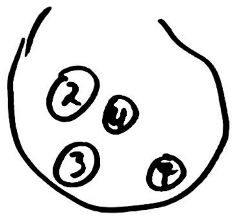
(1) $1, 2, \cdots, n$

\# (antall) ombytter er lik $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$

n fakultet.

trekker ut med/uten tilbakelegging

ordna utvalg



uordna utvalg

Geogebra:

$\underbrace{nCr}_{\text{kommando/funksjon}}(n, k) = \binom{n}{k}$ "n choose r"

$nPr(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Pinkode med n siffer. _ _ _ _ $n=4$

ordna

(2)

\# pinkoder 10^4 generelt 10^n

\# pinkoder med forskjellige siffer $\frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = $

med n siffer $\frac{\ \ }{(10-n)!}$

(er 0 $n>10$)

\# pinkoder med minst to siffer like

er alle pinkoder som ikkje har forskjellig siffer

$$10^4 - \frac{10!}{6!} = 10\,000 - 5040 = \underline{4960}$$

$$\begin{cases} 10^n - (10-n)! & n \leq 10 \\ 10^n & n \geq 1 \end{cases}$$

3

#pinkoder med par av to like, men innbyrdes forskjellige, tall

1,1,2,2   3,4,3,4

1212

1221

2211

2121

2112

$10 \cdot 9$ #ordna, forskjellige siffer.

_ _ _ _ $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

pin
#koder: $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 90 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 90 \cdot 3 = \underline{270}$

Mer om PIN koder mot slutten av notatet sider 12–14.

4

\# kombinasjoner av tall $\{1, 2, \dots, n\}$

$i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k$ $\qquad k \leq n$

eks $k = 3$ $\qquad 1 < 5 < 6$

$5 < 7 < 10$

$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ $\qquad$ # k forskjellige tall ordnet.

$k!$ måter å endre rekkefølgen på de k forskjellige tallene.

Bare én av disse blir etter økende størrelse.

$$\#\{ i_1 < i_2 < \dots < i_k \mid i_1, i_2, \dots \in \{1, \dots n\}\}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

5

$$\overbrace{XXYXYYX \cdots YX}^{\text{ord med } n \text{ bokstaver blant } X \text{ og } Y}$$

Hvor mange slike ord kan vi lage? $\underline{2^n}$

Hvor mange slike ord kan vi lage som har presis k X-er.

XXYXYYX

YYXXXYX

etc.

$n = 7$

$k = 4$

La X-ene være forskjellige $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

#ord av lengde n med $X_1, \ldots, X_k$ éngang:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

deler med antall ombytter av $X_1, \ldots, X_k$, som $k!$

6

\# ord i X og Y med k X-er i ord av lengde n

$$= \binom{n}{k}$$

\# binære tall med 5 siffer og 3 0-er : $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

binær tall er
tall i 2-tallsystemet

1011 = 11

111 = 7

11 = 3 etc

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomialformelen

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

n = 2 $\quad (X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

n = 3 $\quad (X+\cancel{Y})^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$

n = 4 $\quad (X+Y)^4 = X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4$

etc.

7

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$= 2^n$ ord i x og y

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\begin{array}{c}\#\text{ ord av lengde } n \\ \text{i } x \text{ og } y \text{ med} \\ k\ x\text{-er}\end{array}\right)}_{\binom{n}{k}} \cdot x^k y^{n-k}$$

n objekter ordnet i j klasser med n_j objekter

Hvor mange måter kan disse n objekten ordnes i? SVAR neste side

(Foregående eksempel $j=2$ $n_x = k$, $n_y = n-k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n_x!\,n_y!}$$
)

#kombinasjon $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_j!}$

8 svar på opgaven side 7 : $\dfrac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{60}}$

n objekter i urnen
trekker ut k ganger.

$\boxed{\text{Uordna utvalg med tilbakelegging}}$

$k=1$: $\underline{n}$

$k=2$ $\dfrac{\#\text{ to forskjellige}}{2} + \#\text{ to like}$

$\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n-1)+2n}{2}$

er $\dfrac{(n+1)n}{2}$.

$n=2$ $\{x, y\}$ #kombinasjonar $k+1$

k

9 n objekter k ~~vordna~~ utval med tilbakelegging.

$$\underbrace{X_1}_{\text{fast}} \overbrace{|||\ X_2\ ||\ X_3\ |\ \dots\ X_n\ ||||}^{n-1+k}$$

$$\frac{(n-1+k)(n-1+k-1)\cdots(k+1)}{(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

(ikkje i boka)

se eksempler på side 17..

10

Eksempel Antall 5 siffra tall med

2 5-ere

2 3-ere

1 7-er

er lik $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{120}{2\cdot 2} = 30$

oppgave 1. Finn antall 10-siffra tall med

1 1-er, 2 2-ere

3 3-ere og 4 4-ere.

For eksempel 1223334444 og 2144423443

oppgave 2. Finn antall tall med 4 forskjellige siffer hva det er, 1 av ett siffer, 2 av et annet, 3 av et tredje og 4 av et fjerde siffer.

svar neste side.

(11) SVAR 1. Antallet er $\dfrac{10!}{1!\,2!\cdot 3!\cdot 4!}$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3} = 9\cdot 7\cdot 5^2 = 175\cdot 9 = \underline{\underline{1575}}$$

SVAR 2. For hver ordna 4-tupel med 4 forskjellige tall får vi antallet kombinasjoner fra opg 1.

Antall tall med 4 forskjellige siffer som forekommer 1, 2, 3 og 4 ganger er derfor lik

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 1575$$

PIN koder

PIN kode eksempler

1234, 5776, 9812

12 Antall PIN koder $10^4 = \underline{10\,000}$

(alle tall fra 0000 til 9999)

Antall PIN koder med forskjellige siffer

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$

13 Forskjellig Par av to like siffer

2332, 4411

5353,

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 90 \cdot 3 = \underline{270}$$

To siffer én av dem forekommer én gang

2333

4144

9989

$$10 \cdot 9 \cdot 4 = 90 \cdot 4 = \underline{360}$$

Kun ett siffer: 2222,

$\underline{\text{antall}: 10}$

(14) 3 forskjellige siffer

1233 9818

5727 2239

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{4!}{1!1!2!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 = 720 \cdot 6$$

$$= 3600 + 720 = \underline{4320}$$

Totalt antall PIN-koder

$$10 + (\underbrace{270 + 360}_{630}) + 4320 + 5040$$

$$640 \qquad + 9360 = \underline{10\,000}$$

15

Antall 6-siffra tall med siffer 1, 2, …, 9

slik at 1) 3 av siffrene er like — 111223

2 av siffrene — 575175

1 som forekommer én gang.

2) 3 par av like siffer — 112233, 567765

Hvilke type siffer tror dere har flest kombinasjoner?

SVAR

(16)

1

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!\,2!\,1!}$$

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = \underline{\underline{30240}}$$

De tre parene av tall er unike fordi de har forskjellige antall elementer.

ordna par av forskjellige tall · antall ordna kombinasjoner av 6 objekter, hvor 3 er like, 2 er like.

2

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6!}{2!\,2!\,2!}$$

3 ulike siffer uordnet

antall ordna kombinasjoner av 3 forskjellige par.

$$= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2^3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$$

$$= \underline{7560}$$

17

Eksempel. Vi benytter at

\# uordna uttrekk k ganger fra en urne med n forskjellige objekter er lik $\underline{\binom{n+k-1}{k}} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Vi ser på sifter $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$ $\mathbb{N}$ hvor i-ene er i mengden $\{1,2,\ldots,n\}$

Dette antallet kan vi tolke som antall mulige k-uordna uttrekk med tilbakelegging fra mengden $\mathbb{N}$.
Trekker vi ut k slike tall og glemmer rekkefølgen de kom så kan de ordnes presis på én måte etter størrelse.
For eks $2,3,5,1$ ordnes så $1,2,3,5$ ..

$$\#\{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}^k \mid i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k\} = \underline{\binom{n+k-1}{k}}$$

→

sammenlign dette med antallet $\binom{n}{k}$ hvis ulikheten er ekte.

For eksempel med $n=10$ og $k=5$ så er antall $0 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le i_4 \le i_5 \le 9$ lik $\binom{10+5-1}{5}$

$$\binom{14}{5} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} = \underline{\underline{2002}}$$

(18)

antall $0 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \le 9$ er lik $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$

Opg Vi trekker k ganger fra en krukke med Rød, Grønn og Blå kuler. Vi legger tilbake kulen etter hvert trekk. Hvor mange uordna kombinasjoner av trekk er det?

$n = 3$
k trekk
\# kombinasjoner $\quad \binom{3+k-1}{k} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$

(19) Dette kan vi alternativt komme frem til som følger.

$$\sum_{i=0}^{k} \Big(\underbrace{\text{\# uordna kombinasjoner av to typer objekter med totalt antall objekter lik } i}_{i+1 \text{ (antall elementer til en av objektene er } 0,1,2,\dots,i\text{)}} \Big)$$

$$\sum_{i=0}^{k} i+1 = \sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$