5 april
2022

19.1-2 Sannsynlighet

Kaster en mynt – to utfall < Mynt / Kron

1

KKMMKKMMK....

Terning 6 utfall 1, 2, 3, 4, 5 og 6

55364565621531555131565312464...

Stokastiske forsøk.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\text{ Kron}}{\#\text{ antall forsøk } n} = \frac{1}{2}$$

Kaster to mynter (én mynt 2 ganger)

MM KK MM MM MM MK KK ...

2

én mynt: $S = \{M, K\}$ utfallsrommet.

to mynter $S \times S = \{(M,M), (M,K), (K,M), (K,K)\}$

Et forsøk gir et element i utfallsrommet.

Hendelser er delmengder av utfallsrommet.

2 Mynt $\{(M,M)\}$

én mynt én Kron $\{(M,K), (K,M)\}$

2 kron $\{(K,K)\}$.

Uniform sannsynlighetsmodell

$P(M,M) = \frac{1}{4}$ etc

$P(e), e \in S$ er like

$P(e) = \frac{1}{\#S} = \frac{1}{4}$.

Så $P(\text{2 kron}) = \frac{1}{4}$ og $P\left(\begin{matrix}\text{én mynt}\\ \text{én kron}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}$

$P(\text{2 mynt}) = \frac{1}{4}$

3

Total sannsynlighet er $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$.

Hva er sannsynligheten for 3K, 2K 1M, 1K, 2M, 3M når vi kaster 3 mynter?

Utfallsrom $S \times S \times S = \{KKK, KKM, KMK, MKK, KMM, MKM, MMK, MMM\}$.

uniform sannsynlighet.

$P(e) = \frac{1}{8}$, $e \in S^3$.

$H_{3M} = \{MMM\}$

$H_{2M1K} = \{KMM, MKM, MMK\}$

$H_{1м2к} = \{мкк, кмк, ккм\}$

$H_{3к} = \{ккк\}$

$P(H_{3м}) = \frac{1}{8} = 0.125$

$P(H_{3к}) = \frac{1}{8} = 0.125$

$P(H_{2м1к}) = \frac{3}{8} = 0.375$

$P(H_{1м2к}) = \frac{3}{8} = 0.375$

4

Kaster en mynt n ganger. (Rettferdig mynt)

Hva er sannsynligheten for å få mynt k ganger?

5 Utfallsrommet $S^n = S \times S \times \cdots \times S$

uniform sannsynlighetsfordeling

$P(e) = \frac{1}{2^n}$

$e \in S^n$.

Hendelse : k mynt.

$P(H_k) = \frac{1}{2^n} \cdot \# H_k$.

$n = 5$
$k = 3$

4 muligheter 3 muligheter 5 muligheter

M _ _ M M _

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \binom{5}{3}$

$P(H_k) = \underline{\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}$

6

Sannsynlighetsmodell.

Hvert stokastisk forsøk gir et element i S.

Mengde S utfallsrommet

Delmengder $H \subset S$ hendelser.

$S, \emptyset$ skal være hendelser

Tellbare snitt og unioner av hendelser er også hendelser.

Komplement til hendelser er også hendelser

σ-algebra.

Funksjon P : Hendelser $\longrightarrow [0,1]$

$P(S) = 1$ $P(\emptyset) = 0$

$P(H \cup K) = P(H) + P(K)$

disjunkte

(Utvides til tellbare disjunkte unioner $P(\cup_i H_i) = \sum_i P(H_i)$)

H K

Et utfall (element i S) er <u>gunstig</u> for hendelsen H hvis elementet er i H.

7

$$P(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\text{gunstige utfall for } H}{\#\text{stokastiske forsøk } n}$$

Eksempel

Kaster en rettferdig terning.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Rettferdig terning : uniform sannsynlighetsfordeling

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \qquad i = 1, \dots, 6$$

$$H_{\geq 4} = \{4, 5, 6\}$$

$$P(H_{\geq 4}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Kaster to terninger

8 utfallsrom $S \times S$ $\quad \# S \times S = 6^2 = 36$

Uniform sannsynlighetsfordeling

$$P(i,j) = \frac{1}{36}.$$

oppg.

Hva er sannsynligheten for å få to enere? $\frac{1}{36}$

2 og 3? $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Hendelsene er $\{(1,1)\}$ og $\{(2,3),(3,2)\}$

Hva er sannsynligheten for at summen av de to terningene er minst 11?

$$H_{\geq 11} = \{(6,6),(5,6),(6,5)\}$$

$$\frac{3}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

9 Tar summen av de to terningene

H_i = summen er lik i

$H_2 = \{(1,1)\}$

$H_3 = \{(1,2),(2,1)\}$

$H_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$H_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$H_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$H_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$H_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$\vdots$

$P(H_2) = \frac{1}{36}$

$P(H_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(H_4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(H_5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(H_6) = \frac{5}{36}$

$P(H_7) = \frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}$

$P(H_8) = \frac{5}{36}$

$P(H_9) = 1/9$

$P(H_{10}) = 1/12$

$P(H_{11}) = 1/18$

$P(H_{12}) = 1/36$.

Hva er sannsynligheten for at summen er ≤ 5?

(10) $H_{\leq 5} = H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5$ disjunkt felles.

$$P(H_{\leq 5}) = P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) + P(H_5)$$
$$= \frac{1}{36}(1+2+3+4) = \underline{\frac{10}{36}}$$

$$P(H_{odd}) = P(H_3 \cup H_5 \cup H_7 \cup H_9 \cup H_{11})$$
$$= P(H_3) + P(H_5) + P(H_7) + P(H_9) + P(H_{11})$$
$$= \frac{1}{36}(2 + 4 + 6 + 4 + 2) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

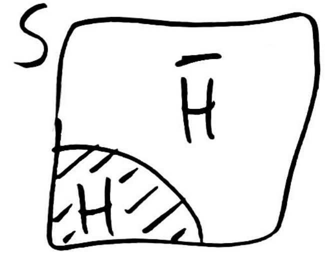
Egenskaper til sannsynlighetsfunksjonen.

$$P : \text{Hendelser} \longrightarrow [0,1]$$

11

$$\bar{H} = S \setminus H = S - H$$ komplementet H i S.

en ny hendelse



$$P(\bar{H}) = 1 - P(H).$$

H og $\bar{H}$ disjunkte

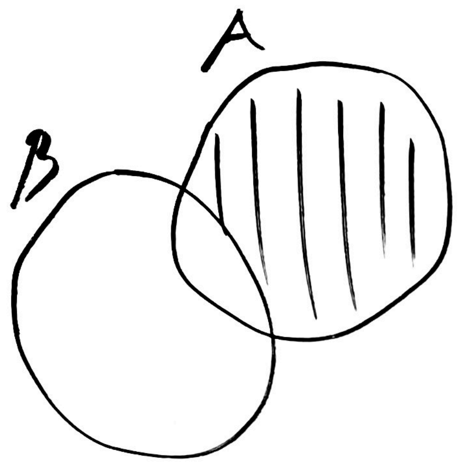
$$H \cup \bar{H} = S$$

$$P(S) = \underbrace{P(H) + P(\bar{H})}_{P(H \cup \bar{H})} = 1.$$

så $P(H) = 1 - P(\bar{H})$.

2 terninger
sum ≤ 11.

$$P(H_{\leq 11}) = 1 - P(H_{12}) = \underline{1 - \frac{1}{36}}$$ siden $H_{12} = \bar{H}_{\leq 11}$



$$A \setminus B = A - A \cap B$$

$$\underbrace{A \setminus B \cup A \cap B}_{\text{disjunkt}} = A$$

$$P(A \setminus B) + P(A \cap B) = P(A)$$

så $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

12

Tohendelser A og B

$$\underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$P(A \cup B) = P(\underbrace{(A \setminus B) \cup B}_{\text{disjunkt}}) = \underbrace{P(A \setminus B)}_{P(A) - P(A \cap B)} + P(B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$