8 april 2022

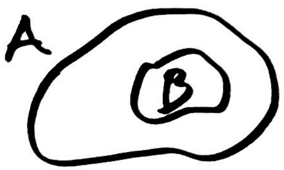
19.4 Betinga sannsynlighet

A, B Hendelser utfallsrom S.
(delmengder av S)

Den betinga sannsynligheten for A gitt B

$$P(A|B)$$

sannsynlighet for hendelse A gitt hendelse B.

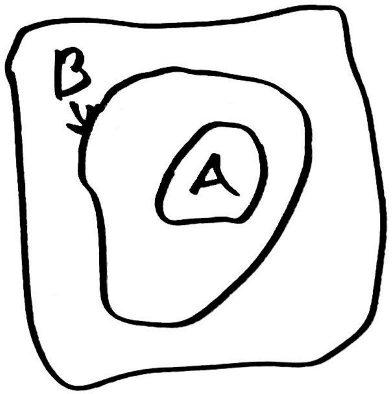


$A \supset B$

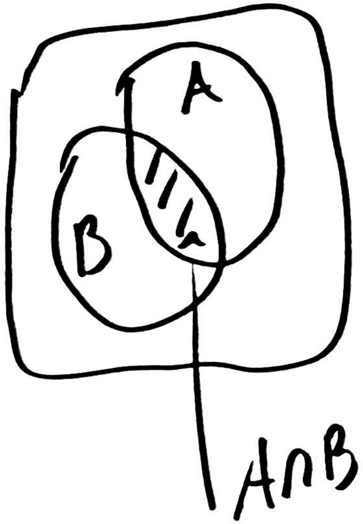
$$P(A|B) = 1$$

disjunkte.

$$P(A|B) = 0$$



$$P(A|B) = \frac{\text{areal } A}{\text{areal } B} = \frac{P(A)}{P(B)}$$



$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} \quad P(B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\text{gunstige utfall for } A\cap B \,/\, n}{\# \text{ —— '' —— } B \,/\, n} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Terning. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$H_{\geq 3} = \{3,4,5,6\}$ $\qquad H_{odd} = \{1,3,5\}$

$H_{\leq 5} = \{1,2,3,4,5\}$ $\qquad$ Rettferdig terning

$P(H_{\geq 3}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $\qquad P(H_{odd}) = \frac{1}{2}$

$P(\leq 5) = 5/6$

$$P(H_{odd} \mid H_{\leq 5}) = \frac{P(H_{odd} \cap H_{\leq 5})}{P(H_{\leq 5})} = \frac{1/2}{5/6} = \frac{3}{5} = \underline{0.6}$$

$H_{odd} \cap H_{\leq 5} = \{1,3,5\} = H_{odd}$

Opg.

$$P(H_{\geq 3} \mid H_{\leq 5}) = \frac{P(H_{\geq 3} \cap H_{\leq 5})}{P(H_{\leq 5})} = \frac{3/6}{5/6} = \frac{3}{5} = \underline{\underline{0.6}}$$

$H_{\geq 3} \cap H_{\leq 5} = \{3,4,5\}$

$$P(H_{odd} \mid H_{\geq 3}) = \frac{P(H_{odd} \cap H_{\geq 3})}{P(H_{\geq 3})} = \frac{P(\{3,5\})}{P(\{3,4,5,6\})}$$

$$= \frac{2/6}{4/6} = \underline{0.5}$$

$$P(H_{odd} \mid H_{\geq 3}) = P(H_{odd})$$

Viser at hendelsene er <u>uavhengige</u>

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \mid B)\, P(B) = P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Så

$$\boxed{P(B \mid A) = P(A \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}}$$ Bayes setning

$$\frac{P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{P(A \mid B)}{P(A)}$$

Kvotientene lik 1 gir

$$P(B|A) = P(B) \iff P(A|B) = P(A).$$

Vi sier at hendelsene A og B er <u>uavhengige</u>.

19.5 i boka.

opg. Hvis $P(A|B) = P(B|A)$, da må $P(A) = P(B)$.

opg

$P(A|B) = 1/2$

$P(B) = 0.6$

$P(A) = 0.4$

Hva er da $P(B|A) \underset{\text{Bayes}}{=} P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{4} = \underline{0.75}$

To sykdommer A, B

$P(A) = 2\%$ $\quad P(B) = 5\%$

$P(A \cup B) = 6\%$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= 2\% + 5\% - 6\% = 1\%$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1\%}{5\%} = 0.2 = 20\%$$

$$P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} \quad \text{Bayes.}$$

$$P(B|A) = 20\% \cdot \frac{5\%}{2\%} = \underline{50\%}$$

19.5 Produktsetning

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gir $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(B) = 30\%$$

$$P(A|B) = 20\%$$

$$P(A \cap B) = 20\% \cdot 30\% = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10}$$

$$= 0.2 \cdot 0.3$$

$$= \frac{6}{100} = 0.06 = \underline{6\%}$$

$S = \{ J_1, J_2, G_1, G_2, G_3 \}$ Gruppe med 2 jenter og 3 gutter.

Trekker tilfeldig.

$P(JJ) =$ P(trekke èn jente | allerede trukket en jente) · P(trekke en jente)

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$

2 av 5 er jente

$= \frac{1}{10} = 10\%$

$P(GG) =$ P(trekke en gutt | allerede trukket èn gutt) · P(trekke èn gutt)

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 30\%$

$P(JG)$ $= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$

én gutt
én jente

$$P(\text{jente} \mid \text{gutt}) \cdot P(\text{gutt})$$
$$+ P(\text{gutt} \mid \text{jente}) \cdot P(\text{jente})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \quad \left(= \frac{3}{10}\right)$$
$$+ \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \quad \left(= \frac{3}{10}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{6}{10}}} \quad \text{(total sum)}$$

Eks 50 lodd
5 vinnerlodd
Trekker 3 av loddene (uten tilbakelegging)

H_1 = vinner på ett av loddene

$H_{\geq 1}$ = vinner på minst ett av loddene

H_0 = vinner ikkje.

H_3 = vinner på alle 3.

$P(H_3)$ = P(vinne på 1 lodd) · P(vinne på 2 lodd | vunnet på første) · P(vinne på 3 lodd | vinne på lodd 1 og 2 trekking)

$$= \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} = \frac{1}{40 \cdot 49} \sim \frac{1}{2000}$$

$$P(H_0) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \sim \underline{0.724}$$

$H_0 \cap H_{\geq 1} = \emptyset$

$H_0 \cup H_{\geq 1}$ utfallsrommet (loddene)

$$P(H_{\geq 1}) = P(\overline{H_0})$$
$$= 1 - P(H_0)$$
$$= 0.276 = \underline{27.6\%}$$

Eksempel. Klasse med 20 elever $= n$ (tilfeldige utvalg av bursdagen)
365 dager i året

H : ingen av elevene har bursdag samme dag.

$\overline{H}$: minst to av elevene har bursdag samme dag.

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H)$$

$$P(H) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-20+1}{365}$$

$$= 0.58856 \sim 0.59$$

$$P(\bar{H}) = 1 - 0.59 \sim 0.41 = \underline{41\%}$$

sannsynlighet for at minst to elever har bursdag samme dag.