20.04
2022

19.7 Uavhengighet

A og B er uavhengige hvis hendelse A ikkje påvirker sannsynligheten for hendelse B (og omvendt)

Betinget sannsynlighet $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Uavhengighet: $P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

$\Leftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A).$

$\Leftrightarrow$

Kaster terning

$$H_{jevn} = \{2,4,6\}$$
$$H_{\geq 4} = \{4,5,6\}$$
$$H_{\leq 3} = \{1,2,3\} = \overline{H_{\geq 4}}$$

$$P(H_{\geq 4}) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_{jevn}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(H_{jevn} \cap H_{\geq 4}) = P(\{4,6\}) = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$P(H_{jevn}) \cdot P(H_{\geq 4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < P(H_{jevn} \cap H_{\geq 4})$$

Så H_{jevn} og $H_{\geq 4}$ er avhengige av hverandre.

$$P(H_{\geq 4} \mid H_{jevn}) = \frac{P(H_{\geq 4} \cap H_{jevn})}{P(H_{jevn})} = \frac{1/3}{1/2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

H_{jevn} øker sannsynligheten for $H_{\geq 4}$

<u>opg</u> $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.6$

$P(A \cap B) = 0.25$

- Er A og B uavhengige?
- $P(A|B)$ $P(B/A)$

$P(A \cup B)$

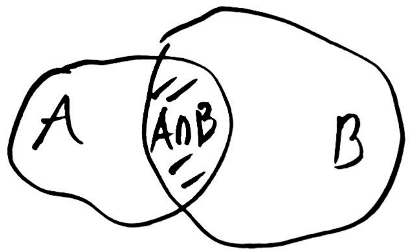
A og B er uavhengige $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = \underline{0.3} \neq P(A \cap B)$

Så A og B er avhengige av hverandre.

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.25}{0.6} = \dfrac{1/4}{3/5} = \dfrac{5}{12} < \dfrac{1}{2} = P(A)$

$P(B/A) = \dfrac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \dfrac{0.6}{0.5} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{2} \leq 0.6 = P(B/$



$$B = (B \setminus A) \overset{\text{disj.}}{\cup} (A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

$$0.6 = P(B \setminus A) + 0.25$$

$$P(B \setminus A) = 0.6 - 0.25 = \underline{0.35}$$

$$A \cup B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{\text{disjunkt}}$$

så $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$$= 0.5 + 0.35$$

$$= \underline{0.85}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.5 + 0.6 - 0.25 = \underline{0.85}$$

$P(A) = 0.3$

$P(B) = 0.5$

A og B er <u>uavhengige</u> hendelser

$P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$

Uavhengige :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.3 + 0.5 - 0.15 = \underline{0.65}$

Vis at hvis A og B er uavhengige. da er også

$\bar{A}$ og $\bar{B}$ uavhengige.

Husk: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ siden $A \cup \bar{A} = S$ utfallsrommet
disj.

Er A og $\bar{B}$ uavhengige?

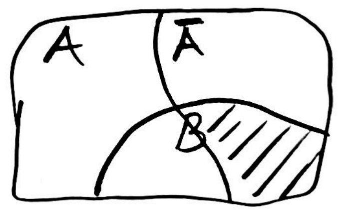
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$= (1 - (P(A) + P(B) - \underbrace{P(A)P(B)}_{P(A \cap B)}))$$

$$= 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B})$$ ✓

så $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ og $\bar{A}$ og $\bar{B}$ er uavhengige hendelser.



$\bar{A} \cap B = B \setminus A \cap B$

$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(\; A \cap B)$

$\bar{A}$ og B er uavhengige:

$$P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(B) - P(\; A \cap B)$$

$$= P(B) - P(B) \cdot P(A)$$

$$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$$

så $\bar{A}$ og B er uavhengige.

A, B, C uavhige. $P(A|B) = P(A)$ $P(B|C) = P(B)$.
$P(A|C) = P(A)$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

$$P(A | B \cap C) = P(A) \text{ etc} \ldots$$

Eksempel kaste mynt 3 ganger

$P(K) = 0.3$
$P(M) = 0.7$

Hva er sannsynligheten for å få Kron 3 ganger på 3 kast? (eller 3 mynter kastes én gang.)

Resultatet av å kaste en mynt er uavhengige av andre kasts resultat.

A_i : mynt på kast nr i

A_1, A_2, A_3 uavhengige

Mynt på alle tre kast: $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = \frac{3^3}{10^3} = \frac{27}{1000}$$
$$= \underline{2{,}7\%}$$

cosinus

<u>19.173</u>

16 gutter $\supset$ 12 gutter

12 jenter $\supset$ 10 jent

M mattegruppen.

G gutt

J jente

a)

$$P(G|M) = \frac{P(G \cap M)}{P(M)} = \frac{6/14}{11/14} = \underline{\frac{6}{11}}$$

$$P(J|M) = \frac{P(J \cap M)}{P(M)} = \frac{5/14}{11/14} = \underline{\frac{5}{11}}$$

$$P(M|G) = \frac{P(G \cap M)}{P(G)} = \frac{6/14}{8/14} = \underline{\frac{3}{4}}$$

$$P(M|J) = \frac{P(J \cap M)}{P(J)} = \frac{5/14}{8/14} = \underline{\frac{5}{6}}$$

S = utfallsrommet klassen.

$$P(G) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

$$P(J) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$P(M) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

$$P(M \cap J) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$P(M \cap G) = \frac{12}{28} = \frac{6}{14}$$

b) $P(G \cap M) = \frac{12}{28} = \underline{\frac{3}{7}}$

c) G og M er uavhengige?

$$P(G) \cdot P(M) = \frac{4}{7} \cdot \frac{11}{14} = \frac{22}{49} \neq P(G \cap M)$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{7} = \frac{21}{49}$$

G og M er nær ved å være uavhengige,
men de er avhengige.

19.171 $P(M) = 0.4$ regner mandag

$P(T) = 0.35$ — tirsdag

$P(M \cap T) = 0.14$ — mandag & tirsdag

$$P(T|M) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0.14}{0.40} = \frac{7}{20} = 0.35 = P(T)$$

så M og T er uavhengige hendelser.

Pascals trekant

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\vdots \\
n \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \cdots
\end{array}
$$

Fjerde tallet i raden 1, 13 er $\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6}$

$= \underline{13 \cdot 11 \cdot 2} = \underline{286}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= 1\cdot a^3 + (1+2)a^2b + (2+1)ab^2 + 1b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\
& 1\cdot a^4 + (1+3)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (3+1)ab^3 + 1b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3 \,..
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a+b)(a+b)^4 \\
&= a^5 + (1+4)a^4b + (4+6)a^3b^2 + (6+4)a^2b^3 \\
&\quad + (4+1)ab^4 + b^5 \\
&= a^5 + 5a^4b + \underline{10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}
\end{aligned}
$$

Viser at tallet i rad $n+1$ nummer $i+1$ er $\underline{\binom{n}{i}}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\binom{n}{i} \arrow[dr, no head] & & \binom{n}{i+1} \arrow[dl, no head] \\
& \binom{n+1}{i+1} &
\end{tikzcd}$$

Vi må vise

$\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}$

$= \binom{n+1}{i+1}$.

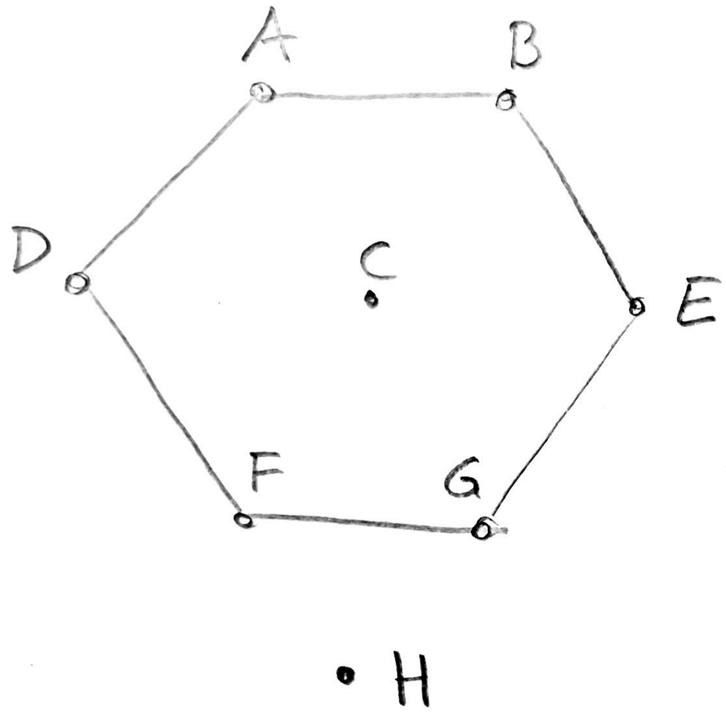
$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i-1)!}$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i-1)!}\left(\frac{1}{n-i} + \frac{1}{i+1}\right)$$

finner felles nevner.

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i-1)!}\left(\underbrace{\frac{i+1+n-i}{(n-i)(i+1)}}_{\frac{n+1}{(i+1)(n-i)}}\right) = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!}$$

$$= \underline{\underline{\binom{n+1}{i+1}}} \checkmark$$



Viser at summen av elementene i sekskanten er lik $2H$

Vi har $A+B=C$

$D+C=F$

$C+E=G$

$F+G=H$

Dette gir

$$\underbrace{A+B}_{C}+C+D+E+F+G$$

$$=(D+C)+F+(C+E)+G$$

$$=2F+2G=2(F+G)=\underline{\underline{2H}}$$