22 april 2022

19.8 Binomisk forsøk

Forsøk. Kjenner sannsynligheten for hendelse H
$P(H) = p$

1

Gjentar forsøket n ganger. Forsøkene er uavhengige.

Hva er sannsynligheten for at H inntreffer k ganger.

Eks Kron - Mynt

Kaster én mynt. To muligheter
Mynt eller Kron.
Antar at det er lik sannsynlighet for K og M.

Kaster n ganger: $\underbrace{M\,K\,K\,K\,M\,K\,M\,M \ldots K}_{n}$

Alle ord har samme sannsynlig for alle mulige ord
2^n forskjellige ord.

Sannsynlighet for å få k Kron er

$\frac{1}{2^n}$ # antall ord av lengde n med k Kron.

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

2

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n(n-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{binomial koeffisienten}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

Kaster mynt 5 ganger

Sannsynlighet for å få kron 2 ganger

$$\frac{1}{2^5}\binom{5}{2} = \frac{1}{32}\left(\frac{5\cdot 4}{2!}\right) = \frac{10}{32} \sim \underline{0.3}.$$

3

Utfallsrom S elementene er utfall

Gjør stokastiske forsøk - resulterer i et utfall

Hendelser delmengder a S.

$P : \{\text{Hendelser}\} \longrightarrow [0,1]$

$P(S) = 1$ $\quad$ $P(\emptyset) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$A \cup B$ disjunkte

$\square \quad \square$

Stokastisk variabel $\quad X : S \to \mathbb{R}$

$X^{-1}(a,b)$ Hendelse for alle a og b.

Eksempel. $S = \{M, K\}^n = \{$ ord av lengde n i M og K $\}$

$H_k = \{$ ord av lengde n med k forekomster av K $\} \subset S$

alle $u \in S$: $P(u) = \frac{1}{\#S} = \frac{1}{2^n}$ Uniform sannsynlighets-fordeling

4

$P(H_k) = \frac{1}{2^n}(\# H_k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$

siden uniform fordeling

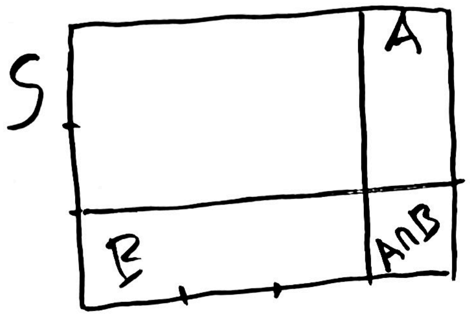
$X : S \to \mathbb{R}$

$X(u) =$ antall K i ordet av lengde n $u \in S$.

$X^{-1}(k) = H_k$

5

Uavhengighet



$P(A) = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

Betinget sannsynlighet

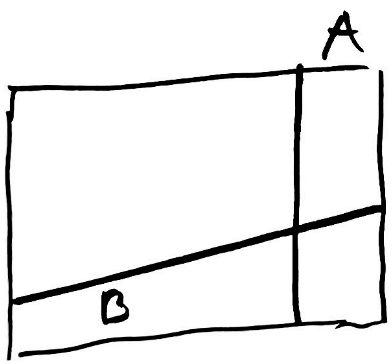
$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

A, B uavhengige

$$P(B|A) = P(B) \iff P(A) = P(A|B).$$

$$\iff P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

Avhengighet



$$P(B|A) > P(B) \iff P(A|B) > P(A).$$

$$\iff P(A\cap B) > P(A)\cdot P(B)$$

Pause

Opg. Kaster en rettferdig mynt

a) – 7 ganger. Hva er $P(H_{K\le 3})$?

#Kron ≤ 3

6

b) – 8 ganger. Hva er $P(H_{K\le 3})$?

a) $H_{K\le 3} = \text{disj} \bigcup_{i=0}^{3} H_{K=i}$

$P(H_{\#K=i}) = \binom{7}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$\binom{7}{i} = \binom{7}{7-i}$

$\overline{H_{K\le 3}} = H_{\#K\ge 4}$

$P(H_{K\le 3}) = \cancel{P}(H_{K\ge 4})$

$H_{K\le 3} \cap H_{K\ge 4} = \emptyset$, $S = H_{K\le 3} \cup H_{\ge 4}$

disj. union.

Så $P(H_{K\le 3}) = \underline{\frac{1}{2}}$

7

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

$$S = H_{k\le 3} \cup H_{k=4} \cup H_{k\ge 5} \quad \text{disj.}$$

$$P(H_{\le 3}) = P(H_{\ge 5})$$

$$1 = P(S) = 2P(H_{\le 3}) + P(H_{k=4})$$

$$P(H_{k\le 3}) = \frac{1}{2}\left(1 - P(H_{k=4})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^8}\binom{8}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{256}\underbrace{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}}_{2\cdot 7\cdot 5}\right)$$

$$P(H_{k\le 3}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{70}{256}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{186}{256}\right)$$

$$= \underline{\frac{93}{256}} \approx \underline{0.36}$$

8

Binomisk forsøk

Hendelse H $\qquad P(H) = p$

komplementet $\bar{H} = S \setminus H$ $\qquad P(\bar{H}) = 1 - p = q$

Hva er sannsynlighet for å få hendelse H k ganger.

ord i H og $\bar{H}$.

$$P(H H \bar{H} H \cdots) = P(H) \cdot P(H) \cdot P(\bar{H})\, P(H) \cdots$$

$$= p^k \cdot q^{n-k}$$

hvor k er antall H

($n-k$ — $\bar{H}$)

$$P(k \text{ gunstige utfall for } H) = \underline{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Når $p = q = \frac{1}{2}$ gir dette $\underline{\binom{n}{k} \frac{1}{2^n}}$.

9

Kaster 3 terninger.

Hva er sannsynligheten for at minst to av terningene viser 5 eller 6?

Rettferdig terning

H 5 eller 6

$\bar{H}$ 1, 2, 3, 4

$P(H) = 1/3 = p$

$P(\bar{H}) = 2/3 = q$

P (H to eller 3 ganger) $= \binom{3}{3} p^3 q^0 + \binom{3}{1} p^2 \cdot q$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{9}$

$= \frac{1+7}{27} = \frac{7}{27} \sim \underline{25.9\%}$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

$$= (p+q)^n = 1 \quad \text{siden} \quad p+q=1.$$

10 (binomialformelen)

Eksempel

Kaster en mynt 5 ganger.

Hva er sannsynligheten for å få Kron 2 ganger hvis $P(K) = 0.6$? (urettferdig)

$P(\bar{K}) = P(M) = 1-0.6 = \underline{0.4}$

(Rettferdig mynt gir $\frac{10}{32} = 0.3125$)

$$\binom{5}{2} \cdot (0.6)^2 (0.4)^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} (0.6)^2 (0.4)^3 = \underline{\underline{0.2304}}$$

3 ganger?

$$\binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^2 = \underline{0.3456}$$

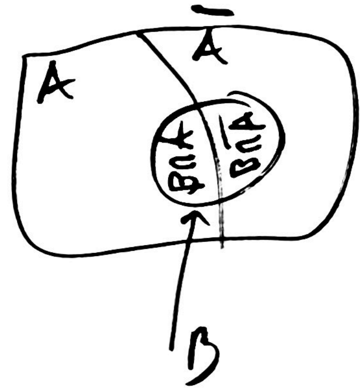
19.215 A 1. Fjellovergang stengt

B 2. — " —

$P(A) = 0.15$

$P(B|A) = 0.60 = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(B|\bar{A}) = 0.10 = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$



$P(A\cap B) = P(B|A)\cdot P(A)$

$P(\bar{A}\cap B) = P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$

b) Så $P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$

$= 0.60\cdot 0.15 + 0.1\cdot(1-0.15)$

$= 0.09 + 0.085$

$= \underline{0.175} < P(B|A)$, $P(\bar{B}) = \underline{0.825}$

(a) A, B er ikkje disjunkt. fordi $P(A\cap B) > 0$ de har stort overlapp.
ikkje uavhengige)

c) 1) $P(A|B)$ 2) $P(A \cap B)$

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)} = 0.6 \cdot \frac{0.15}{0.175}$$

$$= 0.6 \cdot \frac{6}{7} = \frac{3.6}{7} = \underline{0.5143}$$

2) $P(A \cap B) = 0.09 = 9\%$ (regnet ut i b)).