Innlevering	Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 7
Innleveringsfrist	Torsdag 21. april 2022
Antall oppgaver:	8

1

a) Løs likningen $3^{2x-1} = 6$.

b) Løs den doble ulikheten $-4 < 3x + 5 \leq 2/x$.

c) Løs likningen $2\sin^2(t) = \sin(t) + 1$ eksakt for $t \in [0, 2\pi\rangle$.

d) Løs likningen $\ln(|x-1|) = \ln(x^2 - 1) - 1$.

e) Løs ulikheten $\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{5-2x}{2-x}$.

f) Løs likningen $\sqrt{x+5} = 5 - 2x$.

2

Løs følgende initialverdiproblemer

a) $y'(x) = 4x/(y(x))^2$ hvor $y(2) = 3$.

b) $y'(x)(x^2 - 9) = 2 - 3x$ hvor $y(0) = 0$.

c) $y''(t) + 16y = 0$ hvor $y(0) = -2$ og $y'(0) = 4$.

d) $y'(t)(x^2 - 4) = (y^2 + 2y + 1)x$ hvor $y(\sqrt{5}) = 0$.

e) $y'(x) = e^{2x}\cos(3x)$ hvor $y(0) = 1$.

3

a) Finn volumet til omdreingslegemet som fremkommer ved å rotere grafen til $f(x) = \sin(x)$, fra $x = 0$ til $x = \pi/4$, om x-aksen.

b) Toricellis lov er en differnsiallikning som beskriver væske høyden (fra bunnen) som en funksjon av tiden når væsken renner ut av en beholder under ideelle forhold. Torricellis lov sier at høyden $h(t)$ oppfyller differensiallikningen

$$h'(t)A(h) = -a\sqrt{2gh(t)}$$

hvor $A(h)$ er tverrsnittarealet ved høyden h fra bunnen, a er arealet på åpningen der væsken renner ut, g er gravitasjonskonstanten.

Ved tiden $t = 0$ er høyden H. Hva er væskehøyden ved tiden når beholderen har et tverrsnittareal gitt ved $A(h) = \pi(2 + \sqrt{h})^2$. Bunnen til beholdren er i $h = 0$.

4

En trekant ABC har hjørner $A(0,1,2)$, $B(3,1,3)$ og $C(1,0,-2)$.

Vi finner først noen vektorer. Vektorene mellom punktene A, B og C er

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = [3,1,3] - [0,1,2] = [3,0,1]$$

og tilsvarende

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = [1,-1,-4] \qquad \text{og} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{BC} = [-2,-1,-5]$$

En normalvektor til trekanten er gitt ved kryssproduktet av to vektorer i planet. Vi velger vektorene $\vec{c}$ og $\vec{b}$.

$$\vec{n} = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = [1,13,-3]$$

a) Finn arealet til trekanten.

b) Gi en parametrisering av planet som trekanten ligger i.

c) Finn lengden på sidene i trekanten og finn vinkel A.

d) Vi lager et tetraeder ved å knytte de tre punktene A, B og C til et fjernde punkt $D(1,2,3)$. Finn volumet til tetraederet. Hva er høyden fra planet hvor trekanten ABC ligger til punktet D?

e) For hvilken skalar t er vektoren $\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}$ kortest mulig?

5

a) Finn summen til den uendelige geometriske rekken (hvis den eksisterer)

$$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + - \cdots$$

b) Finn summen av dei første 100 tallene som ikkje er delelige med 3.

c) Vi ser på to rekker hvor vi stokker om på rekkefølgen til leddene. Her er den første rekken

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Rekken består av bolker av n kopier av $1/n$ etterfulgt av n kopier av $-1/n$ for $n = 1,2,3,4,\ldots$.

Vi stokker om på rekkefølgen til tallene i rekken slik at i hver bolk av $1/n$ og $-1/n$ så kommer disse to tallene annenhver gang

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

Avgjør om hver av rekkene konvergerer. Hvis de konvergerer finn også summen til rekken.

d) Vis at hvis en rekke $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ konvergerer da må leddene x_n i rekken gå mot null når n går mot uendelig. Gi eksempel på at det er et nødvendig krav for at en rekke skal konvergere, men ikkje tilstrekkelig. Med andre ord gi et eksempel på en rekke hvor leddene går mot null, men hvor rekken ikkje konvergerer.

e) Bestem for hvilke x den geometriske rekken

$$\cos(x)/2 + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) + \cdots$$

konvergerer. Finn summen til rekken når den konvergerer.

6

Finn punktet på parabelen $y = x^2$ som er nærmest mulig punktet $(1, 2)$.

7

Vi skal studere alle tall med fire siffer. Siffrene er $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9 og første siffer behøver ikkje være ulik 0.

a) Hvor mange forskjellige firesifra tall er det.

b) Hvor mange firesiffra tall består av 4 ulike siffer?

c) Hvor mange firesiffra tall har presis to av siffrene like? For eksempel 2545 er et slikt tall.

d) Hvor mange firesiffra tall er det hvor siffrene er slik at presis to og to av dem er like (men innbyrdes forskjellige)? For eksempel 2552 er et slikt tall.

8

I en klasse er det 20 gutter og 5 jenter. Anta at 2 av jenten og at 12 av guttene tar faget biologi. Vi velger ut én tilfeldig elev.

a) Hva er sannsynligheten for at eleven vi velger tar faget biologi?

b) Hva er sannsyligheten at personen vi velger er en gutt som ikkje tar biologi?

c) Anta personen vi velger er en gutt. Hva er da sannsynligheten for at personen tar biologi?

d) Anta personen vi velger tar biologi. Hva er da sannsynlighten for at personen er en gutt?