15.08.2022

Tall

Naturlige tall (telletallene)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Mengde

1, 2, etc er elementer i mengden

$2 \in \mathbb{Z}$ "element i"

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ "ikke element i"

Addisjon

$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

$a + b = b + a$ for alle $a, b \in \mathbb{N}$

Kommutativitet

$(2+3) + 7 = 5 + 7 = 12$

$2 + 3 + 7 = 2 + (3+7) = 12$

$(a+b)+c = a+(b+c)$ for alle a, b og c i $\mathbb{N}$

Assosiativitet

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$+ \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

(enhetselement 1)

Multiplikasjon

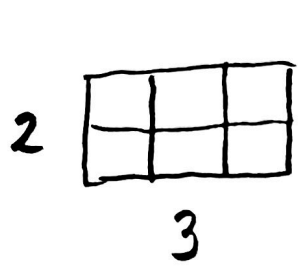
$$a \cdot b = \overbrace{b + b + \cdots + b}^{a}$$

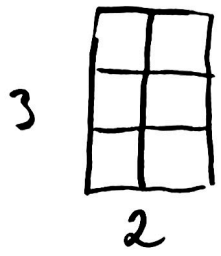
a kopier av b

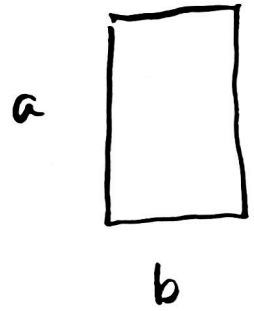
Kommutativ $a \cdot b = b \cdot a \quad a, b \in \mathbb{N}$

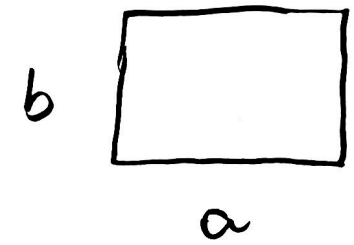
$2 \cdot 3 = 6 = 3 \cdot 2$

$3 + 3 = 6 = 2 + 2 + 2$







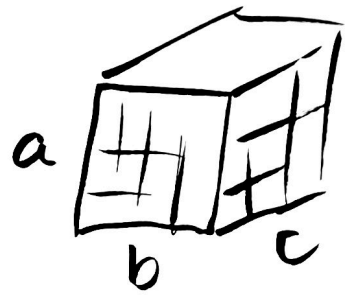


Assosiativ

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$$

$$2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$$



Eksempler

$$12 + 19 + 8 + 11 = (12+8) + (19+11)$$

$$= 20 + 30 = \underline{50}$$

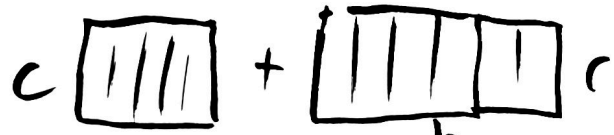
Transitivitet

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

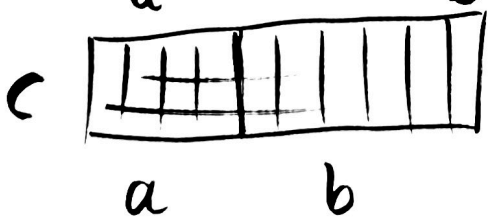
"ganger ut parentesen"

$$(2+3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 = 35$$

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35$$



$$c \cdot a + c \cdot b$$



$$c \cdot (a+b)$$

1 er et multiplikativt enhetselement

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad a \in \mathbb{N}$$

Utvider naturlige tall.

0 null. Enhetselement for addisjon

$$0 + a = a + 0 = a \qquad a \in \mathbb{N}.$$

Utvide til heltallene $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

$= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

innføre tall

$(-1) + 1 = 0$

$(-2) + 2 = 0$

$(-3) + 3 = 0$ etc

Additive inverselementer.

$(-2) + (-3) + \underbrace{2+3}_{5} = 0+0 = 0$

så $(-2) + (-3) = (-5)$ etc ...

$5 + (-2) = 3 + \underbrace{2 + (-2)}_{0} = 3$

$\underbrace{(2+(-2))}_{0} \cdot 3 = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 = 0$

$= 6 + (-2) \cdot 3 = 0$

så $\underline{(-2) \cdot 3 = -6}$

$0 \cdot a = 0$ for alle a.

$\underbrace{(0+b)}_{b} \cdot a = 0 \cdot a + b \cdot a$

Legger til $-(b \cdot a)$ på begge sider av likhetstegnet

så får vi $0 = \underline{0 \cdot a}$

$(-1) \cdot (-1) = 1$

$(\underbrace{1 + (-1)}_{0})(-1) = 0$

$\underbrace{1 \cdot (-1)}_{-1} + (-1)(-1) = 0$

Derfor må $(-1)(-1) = 1$.

$-5 = (-1) \cdot 5$

$-a = (-1) \cdot a$

$-(-3) = (-1) \cdot (-3)$

$= 3$

Potenser $a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n}$ produktet av n kopier av a.

$n \in \mathbb{N}$

a^n ← eksponent

a ← grunntall

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

Potensreglene: $n \in \mathbb{N}$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$\overbrace{a \cdots a}^{m+n} = \overbrace{a \cdots a}^{m} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\underbrace{\overbrace{a \cdots a}^{m} \cdots \overbrace{a \cdots a}^{m}}_{n \text{ kopier}} = \overbrace{a \cdots a}^{m \cdot n}$$

$2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5$

$(2^2)^3 = (4)^3 = 64 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$

Ønsker å bevare potensreglene $2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$

$(2^0)^n = 2^{0 \cdot n} = 2^0$

så $2^0 = 1$

$a^0 = 1$

0° velger at den er lik 1 (to mulighetene 0 og 1)

$5^0 = 1$ $(-13)^0 = 1 \ldots$

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$

$-(2^2) = -4$

-2^2 betyr $-(2^2)$ $(-1) \cdot (2^2)$ konvensjon.

Regnekonvensjoner

- Parentes
- Potens
- Multiplikasjon
- Addisjon

Regner ut fra venstre til høyre

$2-3-5 = 2+(-3)+(-5) = -6$

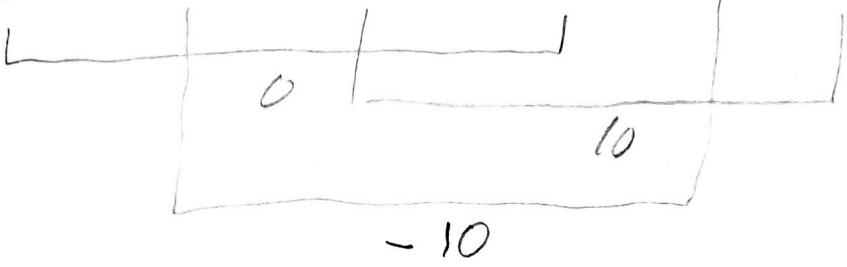
$-1-5 = -6$

Men $2-(3-5) = 2-(-2) = 4$!

betyr $2-3-(-5) = 2-3+5$

Eksempel $9 - 12 + 7 - 9 + 2 + 3$

$= 9 + (-12) + 7 + (-9) + 2 + 3$



$= 0$

$2 + 3 \cdot 4$ betyr $2 + (3 \cdot 4) = 14$

$(2+3) \cdot 4 = 20$

Hva er

oppg

1) $-3 + 4 \cdot 2 + 1 = -3 + 8 + 1 = 6$

2) $-3 - 5 \cdot (-3) + 7(-2) = -3 + 15 + (-14) = -2$

3) $3 - 3^2 = 3 - 9 = -6$

4) $2 \cdot 5^2 = 2 \cdot (5^2) = 2 \cdot 25 = 50$

a er delelig med b hvis

$a = b \cdot c$ for et heltall c.

6 er delelig med 2 fordi $6 = 3 \cdot 2$

15 er delelig med 1, 3, 5 og 15

1, (2), (3), 4, (5), 6, (7), 8, 9, 10, (11), ...

$2 \cdot 2$ $2 \cdot 3$ 2^3 3^2 $2 \cdot 5$

$n \in \mathbb{N}$ er et primtall hvis det bare er delelig med 1 og seg selv og $n \geq 2$. $\geq$ større eller lik 2

Faktorisere et tall som produkt av primtall

$30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

partall er tall som er delelige med 2
ellers oddetall.

n forsøke å dele med $2, 3, 5, 7, \ldots$
opp til p slik at $p^2 \leq n$

Primtallsfaktoriseringen er entydig.
primtallene og antall ganger de
forekommer er bestemt av tallet.