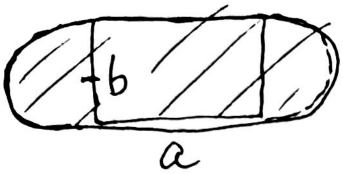
19 okt 22 7.4 <u>Optimalisering</u>

(1)



omkrets fast
Hva må a og b være for at arealet skal være størst mulig?

$0 \leq b \leq \frac{O}{\pi}$

$$O = 2a + 2\pi\left(\frac{b}{2}\right) = 2(a) + \pi \cdot b$$

$$A = a \cdot b + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a \cdot b + \frac{\pi}{4}b^2$$

Uttrykket fra Omkretsen gir $a = \frac{O - \pi b}{2}$

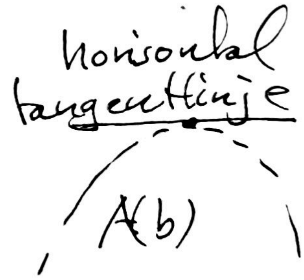
$$A = b\left(\frac{O - \pi b}{2}\right) + \frac{\pi}{4}b^2$$

når omkretsen er lik O:

$$A(b) = \frac{b \cdot O}{2} - \frac{\pi}{2}b^2 + \frac{\pi}{4}b^2$$

variabelen er b.

$$= \frac{b \cdot O}{2} - \frac{\pi}{4}b^2.$$



$A'(b) = 0$ gir:

$$A'(b) = \frac{O}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot 2b = 0$$

$$\frac{O}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot b$$

$$\underline{b = \frac{O}{\pi}}$$

Da er $a = \frac{O - \overbrace{\pi b}^{O}}{2} = 0$

Figuren må være en <u>sirkel</u>.

Når omkretsen er fast, er sirkelen formen som maksimerer ↳ arealet blant alle former. (Ikke lett å vise generelt.)

Variant hvor vi bare har en halvkule.

Port

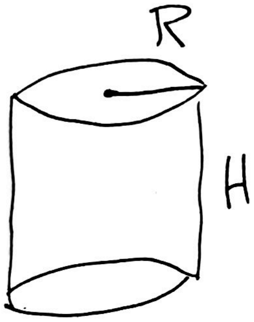
Fast omkrets når er arealet størst?

(2) svar $b = 2a$! (detaljene overlates som en oppgave)

$$O = b + 2a + \pi \cdot b = 2a + (\pi+1)b$$

$$A = a \cdot b + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a \cdot b + \frac{\pi}{8} b^2$$

Diameter $D = 2R$



sylinder

O fast

Volum V skal gjøres størst mulig.

Hva må $\frac{H}{D}$ være da?

(Brusboks $\frac{H}{D} \sim 1{,}86$)

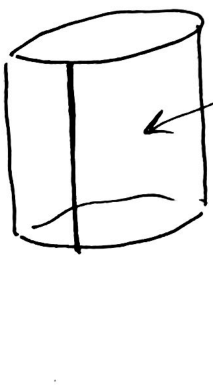
vekte topp og bunn med T

kostnaden deres per areal $= T \cdot$ (kostnaden per areal til sylinderen)

Kostnad:

$K = k \cdot$ (overflate sylinder $+ T \cdot$ overflate topp og bunn)

konstant pris/area



overflateareal:

klipper opp og bretter ut

(3) $K = k\left(\underline{2\pi R \cdot H + T \cdot 2\pi R^2}\right)$

$$V = \underbrace{\pi R^2}_{\text{grunnflaten}} \cdot \underbrace{H}_{\text{høyden}} = \underline{\pi R^2 H}$$

(Setter k=1 i utregningene, svaret er uavhengig av k)

K konstant

$$H = \frac{K - 2\pi T R^2}{2\pi R}$$

Setter inn i V:

$$V = \pi R^2 \left(\frac{K - 2\pi T R^2}{2\pi R}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\pi} \cdot \frac{R^2}{R} \cdot \left(K - 2\pi T R^2\right)$$

$$V = \frac{1}{2}\left(K \cdot R - 2\pi T R^3\right)$$

$$V'(R) = \frac{1}{2}\left(K - 2\pi T \cdot 3R^2\right) = 0$$

$$K = 2\pi T \cdot 3R^2$$

$$R^2 = \frac{K}{6\pi T}.$$

$$K = 2\pi R \cdot H + 2\pi T \cdot R^2$$

$$2\pi T \cdot 3R^2 = 2\pi R H + 2\pi T R^2$$ deler med $2\pi R^2$

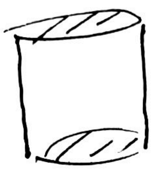
$$\underline{3 \cdot T} = \frac{RH}{R^2} + T$$

$$\frac{H}{R} = 2T$$

$D = 2R$ gir

4 $\boxed{\frac{H}{D} = T}$

Like tykk overalt topp og bunn:



$H = D$

Sylinder m. bunn uten topp. Samme tykkelse

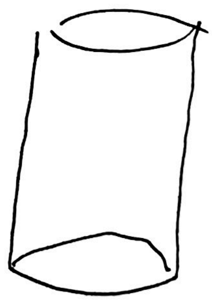
$T = 1/2$

$\frac{H}{D} = \frac{1}{2}$

Topp og bunn dobbelt så tykk som veggene.

$T = 2$

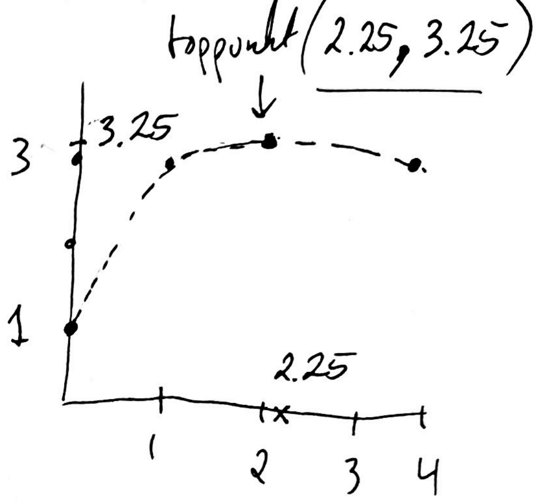
$\frac{H}{D} = 2$



opg. Bestem ekstremalverdiene til

(5) $f(x) = 3\sqrt{x} - x + 1 \qquad D_f = [0,4]$.

(lag gjerne en skisse av grafen)



$$f'(x) = 3(x^{1/2})' - 1$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$f'(x) = 0$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{x} \quad \text{kvadrerer}$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \underline{2{,}25}$$

$$f''(x) = \frac{-3}{4}\cdot x^{-3/2} = \frac{-3}{4(\sqrt{x})^3} < 0$$

Toppunkt hvor $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

$\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$

$$f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + 1$$

$$= \frac{9}{4} + 1 = \underline{3.25}$$

Bunnpunkt (globalt)
i $\underline{(0, 1)}$

Lokalt bunnpunkt i $\underline{(4, 3)}$

Eksempel med kast i konstant gravitasjonsfelt.

Kast

⑥

horisontal komponent av V : V_x

vertikal —— : V_y

Kaster ved tiden $t=0$. Koordinater til objektet:

$$x = V_x t$$

$$y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$\left(\text{gyldig for } 0 \le t \le \frac{2V_y}{g} \right)$

Treffer bakken når $V_y = \frac{1}{2} g t$

$$\underline{t = \frac{2V_y}{g}}$$

Når toppen når $\frac{dy}{dt} = 0$

$$V_y - gt = 0$$

$$\underline{t = \frac{V_y}{g}}$$

y koordinat i topppunktet er $\underline{\frac{1}{2g} V_y^2}$

x —— når vi treffer bakken $\frac{2V_x V_y}{g}$

$V^2 = V_x^2 + V_y^2$ ved Pytagoras.

Gitt en fast v. Hvilke V_x og V_y gir lengst kast?

$V_x V_y$ må da være størst mulig.

Vi har $(V_x - V_y)^2 \geq 0$

(7) $V_x^2 + V_y^2 - 2V_x V_y \geq 0$ og likhet for $V_x = V_y$

$V^2 \geq 2V_x V_y$

så $V_x V_y$ er størst (og lik $\frac{V^2}{2}$) når $V_x = V_y$.

Dette er et kast på $45°$.

Lengden på kastet er da

$$\frac{2V_x V_y}{g} = \frac{V^2}{g}.$$

Høyden er $\frac{1}{2g} V_y^2 = \frac{V^2}{4g}$.

høyeste punkt i kastet er da $\frac{1}{4}$ av lengden til kastet.